Handbuch

der

mathematischen

Forstwissenschaften

zum

Unterricht im Institute

des

Königl. Preußischen reitenden Jägercorps

In zwei Theilen

mit Kupfern, Tabellen und Logarithmentafeln

Verfaßt

von

G. F. Krause

Königl. Preuß. Oberforstrath beim Forstdepartement, Direktor der Forst-Charten-Kammer und Mitglied der Ober-Examinations-Commission.

Berlin 1800

bei Heinrich Frölich.

Bayerische Staatsbibliothek München

Alle meine Erwartungen sind erfüllt, wenn ich mir schmeicheln darf, in einem Fache, zu welchem ich jederzeit viel Neigung hatte, durch meine Bemühungen etwas nicht ganz unbrauchbares geliefert zu haben.

Sollte ich aber überdies so glücklich seyn mir mit meiner geringen Arbeit, Ew. Königlichen Majestät Allerhöchste Zufriedenheit zu erwerben, so würde ich, hierdurch aufgemuntert, alle meine Kräfte aufbieten, dieselbe auch bei meinen künftigen Arbeiten zu verdienen.

Mit tiefster Devotion ersterbe ich

Ew. Königlichen Majestät

Allerunterthänigster

Krause,

Lieutenant im Feld-Artillerie-Corps.

Verzeichniß

der Herren Subskribenten.

	Exempl.
Herr Gr. von Alvensleben, Domdechant	1
— Amerlan, Landjäger in Oranienburg	1
— von Barner, K. Pr. Forstjunker	1
— Börner, Oberförster in Malpfuhl	1
— von Brunn, K. Pr. Forstmeister in Westpreußen	1
— Bartikow, K. Pr. Oberjäger im reit. Corps	1
— Bock, K. Pr. Oberförster in Reppen	1
— Bauermeister, K. Pr. Oberförster in Driesen	1
— Behrend, 1ste, K. Pr. Feldjäger im reit. Corps	1
— Bartikow, K. Pr. Feldjäger im reit. Corps	1
— Biesolt, K. Pr. Landjäger in Westpreußen	1
— Bredow, K. Pr. Oberförster in Libehke in Westpreußen	1
— Brose, K. Pr. Unterförster in Westpreußen	1
Die Kammer-Bibliothek in Magdeburg	1
Herr Cusig, K. Pr. Oberförster zu Nettinnen in Ostpreußen	1
— Cuse, K. Pr. Oberforstmeister zu Bromberg	1
— Cusig, K. Pr. Oberförster zu Zellgrewo in Westpreußen	1
— Creyser, K. Pr. Conducteur	1
Die Clev-Meursische Kriegs- und Domainenkammer	2
Herr Demmler, Conducteur	1
— Donath, K. Pr. Forstmeister zu Cartzig	1
— Draing, Oberjäger	1

Exempl.

Herr Drosedow, Kammer- Forst- und Bauregistrator	1
Das Königl. Pr. Forstdepartement	30
Herr Eyber, K. Pr. Oberjäger im reit. Corps	1
— Eckert, 2te, K. Pr. Feldjäger im reit. Corps	1
— Eggeling, Amtsrath	1
— Eimbrodt, Oberförster im Halberstädtschen	1
— Eckert, dito dito	1
— Eckert, Oberförster zu Warnen in Ostpreußen	1
— von Erdmannsdorff, Kriegs- und Dom. Rath zu Hamm	2
— Fabian, K. Pr. Oberförster in Spantedkow	1
— Fintelmann, K. Pr. Feldjäger im reit. Corps	1
— Fitte, Feldjäger im reit. Corps	2
— Fritsche, Feldjäger im reit. Corps	2
— Fromme, Oberförster in Petersberg bei Halle in Sachsen	1
— Gerland, K. Pr. Feldjäger im reit. Corps	1
— Gräuel, 2te, K. Pr. Feldjäger im reit. Corps	1
— Götting, K. Pr. Oberförster im Halberstädtschen	1
— Gräffen, dito dito	1
— Gärtner, Oberjäger im K. Pr. Feldjägerregim. zu Fuß	2
— Giesecke, Büchsenspänner Ihro Hochfürstl. Durchl. der verwittweten Fürstin von Anhalt-Zerbst	1
— Grau, Feldjäger im reit. Corps	1
— Greulich, K. Pr. Oberförster in Leipen in Ostpreußen	1
— Grußmann, Oberförster zu Waydzeck in Westpreußen	1
— Heyd, K. Pr. Oberförster zu Rothmühl	1
— Harschleben, 2te, K. Pr. Feldjäger im reit. Corps	1
— von Hünerbein, K. Pr. Oberforstmeister in Halberstadt	1
— Heinrichs, Hegemeister im Halberstädtschen	1
— Hertzbruch, Forst-Commissarius in Berlin	1
— Hille, Forstmeister zu Reichenau in Böhmen	1
— Freiherr von der Horst, K. Pr. Forstrath und Domherr zu Halberstadt	1
— von Hill, K. Pr. Forstrath in Lindow	1
— Höne, Forstsecretair in Cüstrin	1
— Hahn, Oberförster zu Bischofsrode	1

	Exempl.
Herr Hildebrandt, Revierförster zu Zietzow	1
— Häring, Oberförster in Westpreußen	1
— Hammer, dito	1
— Hirschfeld dito	2
— Jacobi, 2te, K. Pr. Feldjäger im reit. Corps	1
— Jacobi, 3te, dito dito	1
— von Janitz, K. Pr. Oberforstmeister zu Marienwerder in Westpreußen	2
— Jeckel, Hegemeister bei Mrotzen in Westpreußen	1
Die Jastrowsche Kämmerei	1
Herr von Kummer, K. Pr. Forstjunker	1
— Kirchhoff, Hegemeister in Podarin in Westpreußen	1
— Korff, Oberförster zu klein Lutow in Westpr.	1
— Krafft, Jagdzeugjäger und Conducteur zu Neuenkrug	1
— Köllner, Oberförster in Zuhlen	1
— Kurzleben, Feldjäger im reit. Corps	1
— Köhne, Landjäger im Halberstädtschen	1
— Kemnitz, Kriegs- und Domainenrath	1
— Kersten, Oberförster im Halberstädtschen	1
— Klewitz, Kriegs- und Domainenrath in Magdeburg	1
— Kunckel, Hegemeister in Westpr.	1
— von Krebs, Forstmeister in Gr, Schönebeck	1
— Kobcke, Oberjäger in Lubiath-Fließ	1
— Kühne, Oberförster zu Cunersdorff	1
— Kaplik, Feldjäger im reit. Corps	1
— Knaack, Oberförster in Grammenthin	1
— König, Oberjäger im Feldjägerregimen	1
— Krause, Oberforstmeister in Friedrichswalde in Pommern, für sich und die Forstbedienten und Conducteurs seines Departements	25
— Kersten, Oberförster in Mestke	1
— Kopitz, Oberförster in Wisseck in Westpr.	1
— Kuntze, Oberförster in Burgstall	5
Die Krohnsche Kämmerei	1
Herr Liebadt, Oberförster in Corswandt	1
— Lindstädt, Oberförster zu Zachow	1
— Lenz, Oberförster zu Lietzegörike	1

	Exempl.
Herr Lindstädt, Feldjäger im reit. Corps	1
— Lengnick, Kammer-Conducteur	1
— Lenzmann, sen. zu Camin	1
— Lintz, Oberförster in Wolkow	1
— Lobach, Oberförster zu Wittelnow in Westpr.	1
— Löscher, Kammer-Conducteur in Schneidemühl	1
— Lehmann, Bombardier im Feld-Artillerie-Corps	1
— Lorenz, Professer in Klosterbergen	1
— Mendel, Landjäger im Magdeburger Forth	1
— Meyer, 2te, Feldjäger im reit. Corps	1
— Miedke, Feldjäger im reit. Corps	2
— Milke, Oberförster in Bornim	1
— Morgen, Oberförster in Peichlich in Westpr.	1
Herr Netter, Forstmeister zu Crossen	1
— Nitschke, Landjäger zu Tauer	1
— von Oppen, Capitain im Feld-Artillerie-Corps für das Institut des reit. Jäger-Corps	23
— Olberg, Landjäger zu Regenthin	2
— Oemler, Oberförster zu Wimmelrode	1
Der Osterwicksche Magistrat	1
Herr Pauli, Landjäger im Halberstädtschen	1
— Petri, Oberförster in Bluden in Ostpr.	1
— Peters, 1ste, Feldjäger im reit. Corps	1
— Freiherr von Plettenberg	1
— Pätsch, Oberförster zu Granau	1
— Pohlann, Oberförster in Westpr.	1
— Pehl, Oberförster zu Schlopp	1
— von Puttlitz, Lieutenant im Regiment von Arnim	1
— Perlitz, Lieutenant im Feld-Artillerie-Corps	1
— Petschke, Kammer-Conducteur zu Strzellnow	1
— Peters, Feldjäger im reit. Corps	1
— Raupe, Oberförster im Halberstädtschen	1
— von Rossing zu Borssel	1

Exempl.

Herr Rangbang, Hegemeister in Sophienhoff	1
— Richter, Landjäger in Westpr.	2
— Richter, Volontair des reit. Feldjäger-Corps	2
— von Rohr, Städte-Forstmeister der Neumark	1
— Rinck, Oberförster in Bötzow	1
— von Schwerin, K. Pr. Forstrath	1
— Schlösser, Oberförster im Halberstädtschen	1
— von Schmidt, der Forstwissenschaft Beflissener	1
— Schlesike, Oberförster in Grimnitz	1
— Streech, Förster in Westpr.	1
— Streit, Lieutenant im Feld-Artillerie-Corps	1
— Schlaage, Forst- und Kammer-Conducteur	1
— Schrötter, Kriegsrath	1
— Seiler, 1ste, — Seiler, 2te, — Seiler, 3te, } Feldjäger im reit. Corps	3
— Schierstädt, Landjäger in Acken an der Elbe	1
— Siemenroth, Oberförster in Löbau	1
— Schultz, Oberförster in Behrends	1
— Schlitte, Feldjäger in Osterwick	1
— Stein, Landjäger in Braschen	1
— Schultze, Oberförster in Neumühl	1
— Schmidt, 5te, Feldjäger im reit. Corps	1
— Schmidt, Forstmeister der Grafsch. Tecklenburg u. Lingen	1
— Schröder, Conducteur	1
— Siemenroth, Hegemeister in Westpr.	1
— Schmidt, Oberförster	1
— Schott, Oberförster in Cranz in Ostpr.	1
— Sperlich, Kammer-Conducteur	1
Die Schneidemühlsche Kämmerei	1
Herr Schrader, Unterofficier im Feld-Artillerie-Corps	1
— Schultz, Oberförster in Schönfließ in der Neumark	1
— Schenck, Secretair in Letzlingen	1
— Schönbach, Ober-Gradiermeister zu Schönbeck	1
— Schultze, Feldjäger im reit. Corps	1
— Steffens, Oberförster in Appenburg	1
— Sowbrowsky, Förster in Flatow	1

	Exempl.
Herr Schmähling, Geh. Secretair	10
— Spangenberg, Oberfeuerwerker im Feld-Artillerie-Corps	1
— Schultze, Oberförster in Tegel	1
— Theinert, Bau-Conducteur	1
— Triebel, Forst-Secretair in Potsdam	1
— Tauchert, Conducteur in Westpr.	1
— Tauchert, Hegemeister in Strzellnow	1
Die Usczsche Kämmerei	1
Herr von Voß, K. Pr. Generallieutenant und Chef des Feldjäger-Regiments zu Fuß	1
— Völkner, Oberförster in Westpreußen	1
— Vincent, Antoine, in Schwedt	1
— Graf von Winzingerode	1
— Wachs, Landjäger in Letzlingen	1
— Wicht, Oberförster in Siebigerode	1
— Würfel, Kammer- und Forstsecretair in Wesel	1
— Wenige, Forst-Conducteur	1
— von Wenkstern, Kammersecretair	1
— Weber, Oberförster in Crien	1
— von Wilhelmy, Capitain und Oberförster zu Colpin	1
— Weppler, Oberförster in Warginen in Ostpr.	1
— von Wildenbruch, Major und Landjäger in Westpr.	1
— Weber, Landjäger in Bromberg	1
— Wilhelmy, Lieutenant im Feld-Artillerie-Corps	1
— Witte, Unterofficier im Feld-Artillerie-Corps	2
— Zimmermann, sen., Landjäger in Dinslacken bei Wesel	1

Vorrede.

Der Zweck des gegenwärtigen Handbuches, welches zum Lehrbuche bei dem Institute des reitenden Feldjäger-Corps bestimmt ist, ist im erstern Theile die verschiedenen bei der Forst-Oekonomie und vorzüglich bei Abschätzung der Forsten vorkommende Rechnungen, im zweiten Theile aber die Trigonometrie und den praktischen Theil des Nivellirens auseinanderzusetzen, und durch Beispiele deutlich zu erläutern. So weit nemlich der reitende Jäger, theils in seiner frühern Bestimmung als Conducteur und Taxator, theils in der Campagne als Colonnen-Jäger, theils in seiner spätern Bestimnung als praktischer Forstmann davon Gebrauch machen kann, wenn er nicht blindlings den ihm vorgeschriebenen Regeln und Verordnungen des Departements folgen, sondern als denkender Mann urtheilen will, ob die im Allgemeinen gegebenen Verordnungen für sein Revier etwa eine Ausnahme erfordern, welches zum Nachtheil seines Reviers durch die Erfahrung sich zu spät zeigen würde.

Zu dieser Bestimmung des Handbuches war es nöthig, sich nach den Vorkentnißen der Eleven dieses

Instituts zu richten, welche bereits in der niedern Arithmetik und Geometrie unterrichtet sind, wenn sie zu dem Unterrichte nach diesem Handbuche übergehn. Da nun die oberwehnten Forstrechnungen, und einige in der Trigenometrie gemachte Anwendungen einige Kentniße der allgemeinen Arithmentik erfordern, so bestimmen diese Erforderniße zugleich die Grenzen, in welche sich der Vortrag der Algebra einschränkt, und es konnte hier durchaus nicht die Rede von einer vollständigen Abhandlung derselben seyn, wenn nicht der eigentliche Zweck verfehlt werden sollte.

Bei dem Vortrage von den Logarithmen könnte man mir den Vorwurf machen, daß ich dieselben beßer durch die Exponenten als durch Zusammensetzen der Verhältniße hätte erklären können. Dies läßt sich nun allerdings nicht läugnen, es würde aber noch um einen großen Theil der Vortrag der allgemeinen Arithmetik erweitert haben, wenn der Vortrag auf diese Weise hätte sollen deutlich ausfallen. Da nun auf dem gewählten Wege, zu dem vor Augen habenden Zwecke, die Logarithmen sich gleichfalls vollständig genug abhandeln laßen, dieser Weg ihnen aber nach dem vorangegangenen Unterrichte, einleuchtend genug gemacht werden kann, so glaubte ich hier lieber den für die Eleven leichtern Weg einschlagen zu müßen.

Bei den Beispielen zur praktischen Anwendung der Logarithmen, vorzüglich auf die Progressionen, hatte ich jederzeit die Forstrechnungen vor Augen, und es war mein Zweck, mit jedem Schritte den Leser zu den eigentlich beabsichtigten Rechnungen vorzubereiten.

Die Ableitung der Formel zur Berechnung des Zuwachses, so wie überhaupt alle Forst-Anwendungen, stützen sich auf die Grundsätze, welche zur Forstwirthschaft und Abschätzung der Forsten in des Herrn Geheimen Forstrath Hennert Handbuche hierüber eben so deutlich als gründlich aufgestellt sind, und theils sind sie aus diesem Handbuche geschöpft, theils durch mündliche Verabredung und Ueberlegung mit diesem verdienstvollen Forstmanne berichtigt worden. So wie es überhaupt mein eifrigstes Bestreben gewesen ist, keine Hypothese aufzustellen, welche nicht ganz auf richtige Forstgrundsätze gestützt, und praktisch, wenn auch nur unter gewißen Modifikationen, anzuwenden ist.

Die Tabelle zur Berechnung des Nachwuchses hat gleichfalls ihre Entstehung den Unterredungen mit dem Herrn Geheimenrath Hennert zu verdanken. Die Formel zur Berechnung desselben erfordert nemlich, weil sie zusammengesetzt ist, eine Fertigkeit im Rechnen mit Logarithmen, und es fand sich öfters, daß nicht alle Taxatoren nach einer und derselben Formel ihre Berechnungen anlegten. Um also eine Einförmigkeit bei die-

sen Berechnungen hervorzubringen, übernahm ich das nicht wenig mühsame Geschäft zur Berechnung der Tabelle, die wegen der vorzüglichen Leichtigkeit, welche sie bei diesen Berechnungen verschaft, gewiß die dadurch beabsichtigte Erwartung zu erfüllen hoffen läßt.

In der Trigonometrie bemühte ich mich einen Mittelweg einzuschlagen, nemlich dieselbe nicht ganz ohne Algebra, jedoch auch nicht ganz durch analytischen Calcul vorzutragen. Hierbei hielt ich es meinen bestimmten Lesern angemeßener, lieber etwas an der Allgemeinheit der Formeln zu verlieren, und eine Aufgabe durch zwei leichte Formeln theilweise aufzulösen, als durch einen weitläuftigen und schweren Calcul eine einzelne Formel zu suchen, welche wenn sie nicht ganz genau verstanden worden ist, in der Anwendung leicht Fehler verursachen würde.

Bei der Eintheilnng einer vermeßenen Figur durch paralelle Theilungslinien, glaubte ich mich darum aufhalten zu müßen, weil theils bei einigen Fällen die Theilung durch geometrische Construktion sehr zusammengesetzt ist, theils diese Aufgabe in manchen Fällen bisher durch ein unsicheres Probiren bewirkt wurde. Setzt man nun voraus, daß auf diesem Wege schon nicht die äußerste Strenge beim Zeichnen beobachtet werden kann, daß beim Ausstecken der Linien auf dem Felde selbst, besonders in Forsten, noch einige Abweichun-

gen vorfallen, so darf man sich davon wohl nicht viel Zuverläßiges versprechen, und es werden sich wenigstens, bei richtiger Anwendung der trigonometrischen Formeln, die Fehler vermeiden ließen, welche durch die Zeichnung vorfallen können, weil hier durch die Rechnung unmittelbar die Maße erhalten werden, welche die Paralellen bestimmen.

Beim Nivelliren habe ich mich bemüht dies Geschäft selbst mit der Canalwege so praktisch wie möglich zu erläutern, andere Instrumente anzuführen, hielt ich deshalb unnöthig, weil ich für Forstmänner vorzüglich schreibe, und für diese die Canalwege bestimmt eingeführt ist. Mehrere Anwendungen wurden theils dieses Werk über seine Grenzen erweitert, theils dasselbe wegen der mehrern hierzu nöthigen Kupfertafeln, zu kostspielig gemacht haben. Den Zöglingen des reitenden Jäger-Instituts wird gewiß diese Materie durch ihren verdienstvollen Lehrer den Herrn Hauptmann von Oppen weiter ausgeführt werden.

Die Logarithmen und trigonometrischen Tabellen sind nach der Form der kleinen Schulzeschen Tabellen gedruckt, und nach der großen de Vegaschen Tabelle berichtigt worden.

Noch kann ich nicht schließen, ohne zuvor den würdigen beiden Forstmännern dem Herrn Ober-Land-Forstmeister von Bärensprung und dem Herrn Gehei-

men Forstrath Hennert, für ihre gütige Unterstützung bei meiner Arbeit, den verbindlichsten Dank zu sagen. Durch ihren Beifall aufgemuntert, und durch ihr Kenner-Urtheil geleitet, unternahm ich diese Arbeit. Und wenn diese Schrift für den praktischen Forstmann einiges Brauchbare enthält, so sind es die geprüften Resultate der Erfahrung, welche ich aus lehrreichen Unterredungen mit ihnen geschöpft, und hierauf die mathematischen Anwendungen gebaut habe.

Der Verfasser.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Arithmetik.

§. 1.

Die allgemeine Arithmetik unterscheidet sich von der gewöhnlichen darin, daß man in jener jederzeit eine Regel ausrechnet, welche sich auf alle dahin gehörigen besondern Fälle anwenden läßt, wogegen diese nur allemal einen dieser besondern Fälle angiebt. Diese gefundenen Regeln nennt man Formeln, und die allgemeine Arithmetik berechnet in Einer Formel gleich eine ganze Menge Exempel mit einemmale, da die gewöhnliche immer nur Ein Exempel ausrechnet.

§. 2.

Diesen vorgesetzten Zweck am leichtesten zu erreichen, bedient man sich der Buchstaben statt der Zahlen, und zwar so, daß man Größen, deren Gleichheit ganz außer Zweifel ist, durch einerlei Buchstaben ausdrückt. Uebrigens darf man in einer und derselben Rechnung Eine Größe weder durch verschiedene Buch-

staben ausdrücken, noch umgekehrt durch einerlei Buchstaben verschiedene Größen bezeichnen.

§. 3.

Man nimmt in der allgemeinen Arithmetik, außer dem Unterschiede, welchen die Größen von der Verschiedenheit ihrer Größe erhalten, noch auf die Bedingungen Rücksicht, wodurch gleichartige Größen einander entgegengesetzte Eigenschaften erhalten. Diese Bedingungen unterscheidet man durch die Bennung positiv und negativ, und in dieser Hinsicht hat man also positive und negative Größen.

Aus dieser Erklärung erhellet, daß eine Größe an sich durch diese Benennung keine Veränderung erleiden kann; eine positive Größe ist also eben dieselbe, welche sie negativ seyn würde, und sie leidet an ihren eigenthümlichen Werth hierdurch nicht die mindeste Veränderung. Diese Bezeichnung deutet daher nur einzig auf die Eigenschaft, wodurch sie einer andern gleichartigen entgegengesetzt wird. So sind 100 Schritte positiv eben so viel als 100 Schritte negativ, und soll diese Bezeichnung bloß anzeigen, daß bei der Bewegung eine entgegengesetzte Richtung statt findet, so daß z. E. erstere Bewegung nach dem Morgen geschehen, indem letztere zurück nach dem Abend geschehen ist.

Eben so verhält es sich mit Einnahme und Ausgabe, und muß man die Ausgabe mit der Benennung negativ belegen, wenn man die Einnahme mit positiv bezeichnet hat.

§. 4.

Diese entgegengesetzten Bedingungen drückt man Kürze halber durch die Zeichen + (plus) und — (minus) aus, und bezeichnet mit ersterem die positiven und mit letzterem die negativen Größen.

Wer den vorigen §. mit Aufmerksamkeit gelesen hat, wird sich leicht überzeugen, daß es ganz gleichgültig sey, welche von zweien entgegengesetzten Größen man mit dem Zeichen + und welche man mit — bezeichnen will. Nimmt man z. E. die Bewegung nach dem Morgen als positiv an, so ist die entgegengesetzte nach den Abend negativ, und wenn man die Einnahme mit + bezeichnet, so muß man die Ausgabe dagegen mit — bezeichnen. Hierbei ist einzig zu bemerken, daß man die einmal bei einer Größe angenommene Bestimmung von + und — während dem Gange der Rechnung nicht ändern darf.

§. 5.

Um die Vortheile dieser Bezeichnung durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir annehmen: (Fig. 1.) Es gehe jemand von A aus, in der Absicht nach zu G gehen, als er aber von A bis B 150 Schritte gegangen war, wurde er durch einen Zufall genöthigt, von B bis C 100 Schritte zurück zu gehen. Hierauf ging er von C nach D 220 Schritte vorwärts, als er wieder genöthigt wurde von D nach E 310 Schritte zurück zu gehen. Darauf ging er von E nach F 250 Schritte, und endlich von F nach G 230 Schritte vorwärts. Es wird gefragt, wie weit er sich von dem Punkte A befinde, und auf welcher Seite von A er sey?

Daß man bei Beantwortung dieser Frage auf das Hin- und Zurückgehen Rücksicht nehmen müsse, und daher nicht alle gemachten Schritte zusammenzählen dürfe, fällt von selbst in die Augen. Um nun diese verschiedene Bewegungen deutlicher übersehen zu können, wollen wir sie durch die Zeichen + und — ausdrücken, und dabei alle Wege von A nach G, als dem vorgesetzten Bestimmungsorte, mit +, alle entgegengesetzten, aber mit — bezeichnen. Diesem nach würden wir setzen;

er habe 1.	von A	nach B	den Weg	+ 150	Schritte
2.	= B	= C	= =	— 100	—
3.	= C	= D	= =	+ 220	—
4.	= D	= E	= =	— 310	—
5.	= E	= F	= =	+ 250	— und
6.	= F	= G	= =	+ 230	Schritte

zurückgelegt.

Prüft man die Bedingung der Ausgabe, so wird ihre Auflösung nicht schwer werden. Denn bemerkt man nur, daß durch jede positive Bewegung man sich von dem Punkte A nach G zu entferne, durch jede negative Bewegung aber sich demselben wieder nähere, so wird man hierdurch leicht den Weg zur Auflösung finden, nemlich man wird schließen, daß man sowohl alle positiven als alle negativen Wege jede für sich addiren, sodann eine Summe von der andern abziehen müsse, und daß zugleich das Zeichen der größten Summe werde anzeigen müssen, auf welcher Seite von A er sich befinde. Diesemnach würde $(150 + 220 + 250 + 230) - (100 + 310) = 850 - 410 = 440$ Schritte, die Entfernung von dem Punkte A angeben, und da die Summe der positiven Entfernungen größer als die der negativen ist, so würde man hieraus abnehmen, daß er sich auf der Seite nach G zu befinden müsse, und daher die Entfernung durch $+ 440$ Schritte angeben.

Die Zahlen $150 + 220 + 250 + 230$ so wie $100 + 310$ sind hier in Parenthesen eingeschlossen, um dadurch anzudenken, daß diese ganze in der Parenthese stehende Verbindung, als eine einzelne Zahl angesehn werden soll.

§. 6.

Dieses Beispiel zeigt uns zugleich eine gewisse Uebereinstimmung in der Bedeutung, welche man den Zeichen + und − hier beilegt, mit der, welche man ihnen (§ 32 und 37) in der gewöhnlichen Arithmetik beilegte. Wir mußten nemlich in der Auflösung der

Aufgabe die Zeichen + als Additions- und die Zeichen — als Subtractions-Zeichen annehmen, worin wohl der Grund zu suchen ist, warum man diese Zeichen zur Bezeichung der Addition und Subtraction gewählt hat.

Noch bedient man sich das Zeichen (>) um die Ungleichheit zweien Größen anzudeuten, und nimmt dabei an, daß jederzeit die größere Größe an der Oeffnung, die kleinere aber an der Spietze des liegenden Winkel gesetzt wird. Diesemnach bedeutet $a > b$ daß a größer als b ist.

Von der Addition.

§. 7.

Addiren heißt: zu mehreren gegebenen Größen eine finden, welche die gegebenen sämmtlich enthalt.

Man addirt in der allgemeinen Arithmetik, wenn man die Größen mit ihren Zeichen, wie sie gegeben sind, neben einander schreibt.

Diesem nach giebt $+ b$ zu $+ a$ addirt $a + b$
$- b$ = $+ a$ = $a - b$
$+ b$ = $- a$ = $- a + b$
$- b$ = $- a$ = $- a \quad b$.

Um sich zu überzeugen, daß diese hier angegebenen Summen mit der Erklärung, so wie mit den Begriffen im gemeinen Leben nicht im Widerspruche stehen, wollen wir wieder mit dem Zeichen + den Begriff von Vermögen oder Einnahme, mit dem Zeichen — aber den Begriff von Schulden oder Ausgabe verbinden.

Soll nun zu $+ a$ Vermögen $+ b$ Einnahme hinzugefügt werden, so muß sich hierdurch nothwendig das Vermögen vermehren, daher zu $a + b$ anwachsen.

Soll eine Ausgabe $- b$ mit einem Vermögen $+ a$ verbunden werden, so muß hierdurch nothwendig das Vermögen vermindert werden, daher die Summe

$a - b$ seyn muß. Hier wird man nun entweder Vermögen übrig behalten, wenn dies die Ausgabe übersteigt, oder wenn $a > b$ ist; man wird aber Schulden behalten, wenn die Ausgabe das Vermögen übertrifft, oder wenn $a < b$ gefunden wird.

Eben diese Bewandniß hat es, wenn man zu einer nothwendigen Ausgabe $-a$ eine Einnahme $+b$ erhielt, denn nun hebt sich Einnahme mit der Ausgabe entweder ganz, oder zum Theil, und man wird wieder Vermögen oder Schulden behalten, je nachdem $a < b$ oder $a > b$ angetroffen wird, daher die Summe $-a + b$.

Hat man endlich schon $-a$ Schulden, und man wird noch zu einer unvermeidlichen Ausgabe gezwungen, so kann man diese nicht anders bestreiten, als wenn man seine Schulden vermehrt, wodurch sodann der Vermögens-Zustand noch um so mehr verschlimmert wird, daher in diesem Falle die Summe $-a - b$ oder $-(a + b)$ wo das Zeichen $-$ sich auf die ganze in der Parenthese angegebene Summe erstreckt.

§. 8.

Wenn eine Größe positiv ist, und allein steht, so ist es nicht nöthig, das Zeichen $+$ davor zu setzen. Eben so wenig schreibt man es, wenn in einer Verbindung von Größen eine positive voran steht, oder wenn in einer Parenthese eine positive Größe voran stehet, weil in allen diesen Fällen, nach einer Uebereinkunft der Mathematiker, die Größen ohne Zeichen als positiv angenommen werden.

§. 9.

Bei der Addition finden folgende Abkürzungen statt.

Sind zwei oder mehrere Größen einander gleich, und sie sollen addirt werden, und haben auch gleiche Zeichen, so schreibt man den Buchstaben nur einmal,

und setzt vor denselben die Zahl, welche anzeigt, wie viel gleiche Größen man hat addiren sollen, und giebt ihnen das gemeinschaftliche Zeichen. Daher ist $a+a+a=3a$, $a+a+a+a+a=5a$, und $-b-b-b-b=-4b$. Diese vor dem Buchstaben geschriebene Zahl nennt man den Coefficienten. Jede einzeln stehende Größe hat den Coefficienten 1, weil man sie sich als mit 1 multiplicirt vorstellen kann.

Haben die Größen, welche addirt werden sollen, schon Coefficienten, die Buchstaben sind gleich, und sie haben gleiche Zeichen, so schreibt man den Buchstaben nur einmal, und setzt vor denselben die Summe der Coefficienten mit ihrem gemeinschaftlichen Zeichen. So ist $5a+7a=12a$; $13ab+11ab+ab=25ab$ und $-10cd-3cd=-14cd$. Sind hingegen die Zeichen ungleich, so subtrahirt man die Coefficienten, und setzt vor denselben Buchstaben, die Differenz derselben mit dem Zeichen des Größern. Hiernach giebt $-3a+7a=4a$; $3ab-8ab=-5ab$ und $7cd-3cd+2cd-9cd=-3cd$.

Gleiche Buchstaben mit gleichen Coefficienten aber ungleichen Zeichen heben sich auf und geben o, daher $a-a=o$; $5a-5a=o$; $-3bab+19ab-3ab+20ab=o$.

Von der Richtigkeit dieser Abkürzungen kann man sich leicht überzeugen, wenn man sie nur mit §. 7 vergleicht.

Man nimmt in der allgemeinen Arithmetik an, daß eine Größe aus so viel verschiedenen Theilen besteht, als verschiedene Buchstaben durch die Zeichen + und − mit einander verbunden sind. Daher denn ab, cd, b^2c rc. jederzeit als einzelne Theile eben so zu betrachten sind, als wären sie nur durch einen einzelnen Buchstaben vorgestellt.

Beispiele.

1. zu addiren $\left(\begin{array}{l} 3ab + 2ac + 3d^2g \\ 2ab - 5ac - 3dg^2 \end{array}\right.$

$$\overline{5ab - 3ac + 3d^2g - 3dg^2}$$

2.
$$\begin{array}{r} 8ax - 3bc - 5dx + 12 \\ -ax + 7bc - 2dx - 8 \\ \hline 7ax + 4bc - 7dx + 4 \end{array}$$

3.
$$\begin{array}{r} a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \hline 2a^3 + 6ab^2 \end{array}$$

4. $a^3 + 2ax + x^2 - a^3 + 2ax - x^2 = 4ax$

5. $a^m b^2 + 2c^3 x^{m+1} + 10 a^m b^2 - 3c^3 x^{m+1}$
$= 11 a^m b^2 - c^3 x^{m+1}$.

Von der Subtraction.

§. 10.

Subtrahiren heißt: zu zwei gegebenen Größen eine dritte finden, welche zu der einen addirt, die andre hervorbringt.

Von den zweien gegebenen Größen nennt man diejenige, von welcher subtrahirt werden soll, das Diminuendum, die, welche subtrahirt werden soll, den Diminutor, und die gesuchte den Rest, die Differenz, den Unterschied; und soll der Rest zum Diminutor addirt, das Diminuendum wieder hervorbringen.

Man verrichtet diese Operation, wenn man das Diminuendum mit seinem Zeichen ungeändert läßt, alle

Zeichen der Buchstaben im Diminutor umkehrt, d. h. + in — und — in + verwandelt, und sodann diesen umgeänderten Diminutor nach obigen Grundsätzen zum Diminuendum addirt.

§. 11.

Um uns von der Richtigkeit dieser Angabe zu überzeugen, wollen wir wiederum alle Fälle untersuchen, welche bei dieser Operation vorkommen können. Diese sind $+b$ von $+a$ subtrahirt giebt $a-b$.

$-b$ = $+a$ = = $a+b$

$+b$ = $-a$ = = $-a-b$

$-b$ = $-a$ = = $-a+b$.

Daß die hier angegebenen Differenzen richtig sind, findet man, wenn man sie zum Diminutor addirt; so giebt $a-b+b=a$, $a+b-b=a$; $-a-b+b=-a$ und $-a+b-b=-a$, welches mit der gegebenen Erklärung der Subtraction genau übereinstimmt.

Daß aber auch dieses Verfahren mit den Begriffen im gemeinem Leben übereinkomme, sieht man, wenn man wieder mit den Zeichen + und — die Begriffe von Vermögen und Schulden verbindet.

Soll nun von a Vermögen b Vermögen weggenommen werden, so muß sich der Vermögenszustand um b vermindern, daher die Diferenz $a-b$ seyn.

Werden von dem Vermögen a die Ausgaben oder Schulden b weggenommen, so vermehrt sich dadurch das Vermögen um b. Man bedenke hierbei, daß eigentlich niemand eher sagen kann: ich besitze das Vermögen a als bis er entweder alle seine Schulden und Ausgaben abgemacht, oder das dazu nöthige Geld zurückgelegt hat. Wenn nun jemand zu einer Ausgabe b das Geld schon zurückgelegt, und sodann noch a Vermögen behalten hat, er findet sich aber durch irgend einen Zufall

dieser Ausgabe überhoben, so wird er das dazu bestimmte Geld b zu seinem Vermögen schlagen, und es dadurch um b vermehren, mithin ist für diesem Falle die Differenz $a + b$.

Wird im dritten Falle von a Ausgabe noch b Vermögen abgehen, so kann man sich dies vorstellen, als habe jemand zu einer Ausgabe a das Geld schon bereit gelegt, es werde ihm aber auf irgend eine Weise von diesem Gelde das Quantum b entwendet, so sieht er sich genöthigt, dies Geld b zu der Ausgabe hinzuzufügen, er vermehrt also seine Ausgabe dadurch um eben dies Quantum b, mithin ist die Differenz $- a - b$.

Wenn endlich jemand zu einer Ausgabe a das Geld schon bestimmt hätte, er fände aber einen Theil b dieser Ausgaben, eingetretener Umstände wegen unnöthig, so vermindert sich seine Ausgabe um b, oder sein Vermögen wird um eben dies Quantum vermehrt, daher die Differenz $- a + b$

§. 12.

Da die Subtraction auf diese Art in eine Addition verwandelt wird, so sind auf alle hier vorkommende Abkürzungen aus der Addition hinlänglich zu ersehen.

Zuweilen deutet man die Addition, so wie die Subtraction mehrerer verbundenen Größen bloß an. In diesem Falle schließt man sämmtliche Buchstaben in einer Parenthese ein, ohne ihre Zeichen zu verändern, und verbindet sie durch das Zeichen + oder — mit der andern Größe, je nachdem sie addirt oder subtrahirt werden sollen. z. E. zu $3a + 5b - 17cd + 36ab$ soll addirt werden $- 5a + 3b - 6cd - 25ab + 3b$ so schreibt man dies $3a + 5b - 17cd + 36ab + (- 5a + 3b - 6cd - 25ab + 3b)$ oder von $18ab - 12bd + 3c$ soll subtrahirt werden $7a - 3ab + 5c - 18bd + 21ab$ so schreibt man dies

$18ab - 12bd + 3c - (7a - 3ab + 5c - 18bd + 21ab)$

Will man nun die Parenthesen wegschaffen, welches vorzüglich dann von Nutzen ist, wenn man sieht, daß die Ausdrücke sich abkürzen lassen, dann schreibt man bei der Addition die Größen aus der Parenthese mit ihren Zeichen gerade hin zu den vorhergehenden, bei der Subtraction aber kehrt man alle Zeichen um, und sodann macht man nach der gegebenen Regel die möglichen Abkürzungen. Diesem nach ist

$3a + 5b - 17cd + 36ab + (-5a + 3b - 6cd - 25ab + 3b) =$
$3a + 5b - 17cd + 36ab - 5a + 3b - 6cd - 25ab + 3b =$
$-2a + 11b - 23cd + 11ab$ und.
$18ab - 12bd + 3c - (7a - 3ab + 5c - 18bd + 21ab) =$
$18ab - 12bd + 3c - 7a + 3ab - 5c + 18bd - 21ab = 6bd - 2c - 7a.$

Beispiele.

1. $(a^2b - 4c) - (5a^2b - dc - 4c) =$
   $a^2b - 4c - 5a^2b + dc + 4c = -4a^2b + dc$

2. $(5ax + x^2 - 3a - 9) - (3ax + x^2 + 30 - 3a - 5b) =$
   $5ax + x^2 - 3a - 9 - 3ax - x^2 - 30 + 3a + 5b =$
   $2ax - 39 + 5b$

3. $(2a^3 + bab^2) - (a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3) =$
   $2a^3 + bab^2 - a^3 + 3a^2b - 3ab^2 + b^3 =$
   $a^3 + 3a^2.b + 3ab^2 + b^3$

4. $(5ab - 3ac + 3d^2g - 3dg^2) - (2ab - 5ac - 3dg^2) =$
   $5ab - 3ac + 3d^2g - 3dg^2 - 2ab + 5ac + 3dg^2 =$
   $3ab + 2ac + 3d^2g.$

Von der Multiplication.

§. 13.

Multipliciren heißt: zu zweien gegebenen Größen eine dritte finden, welche aus der einen eben so entsteht, als die andere aus der Einheit.

Die hier gegebenen Größen heißen: das Multiplicandum, die Größe, welche multiplicirt werden soll; der Multiplicator, die Größe, welche multipliciren soll, und die gesuchte nennt man das Product. Auch benennt man erstere beide mit dem gemeinschaftlichen Namen die Factoren, und die gesuchte das Factum.

Untersucht man diese gegebene Erklärung der Multiplication genau, so findet man, daß multipliciren nichts anders heiße, als: zur Einheit und den beiden gegebenen Factoren das vierte Proportionalglied zu bestimmen. Wenn daher a und b diese Factoren sind, so ist $1 : b = a : a \times b$, und $a \times b$, welches man durch ab ausdrückt, ist das Produkt.

§. 14.

Die Einheit wird jederzeit positiv angenommen, und wenn man die Entstehung der Größen aus derselben untersucht, so findet man, daß eine positive Größe aus derselben geradezu, d. h. mit Beibehalt derselben positiven Bedingung, eine negative Größe aber entstehe, wenn man bei derselben die Bedingung entgegengesetzt annimmt.

Wir wollen jetzt die verschiedenen Fälle untersuchen, welche, der Zeichen + und — nach bei, dieser Operation statt finden. Es kann hier gegeben werden

$$+a \times +b$$
$$+a \times -b$$
$$-a \times +b$$
$$-a \times -b.$$

Um diese verschiedenen Fälle aufzulösen, würden wir nach vorigen §. setzen müssen

$$+1:+b=+a:+ab$$
$$+1:-b=+a:-ab$$
$$+1:+b=-a:-ab$$
$$+1:-b=-a:+ab.$$

Um uns von der Richtigkeit der hier angegebenen Produkte zu überzeugen, schließen wir: da im erstem Falle $+b$ aus $+1$ geradezu entsteht, so muß auch ab aus $+a$ geradezu entstehen, daher $+a\times+b=+ab$ seyn.

Weil im zweitem Falle die Bedingung bei $-b$ der von $+1$ entgegengesetzt ist, so muß auch bei ab die Bedingung der von $+a$ entgegengesetzt seyn, daher $+a\times-b=-ab$ seyn.

Im drittem Falle hat $+b$ mit $+1$ einerlei Bedingung, daher muß auch ab mit $-a$ gleiche Bedingung erhalten, oder $-a\times+b=-ab$ seyn.

Da endlich im viertem Falle die Bedingung von $-b$ der Bedingung der Einheit oder $+1$ entgegengesetzt ist, so muß auch die Bedingung von ab der bei $-a$ entgegengesetzt seyn, also $-a\times-b=+ab$ geben.

Betrachtet man diese Produkte genau, so findet man, daß gleiche Zeichen der Factoren ein positives und ungleiche Zeichen derselben ein negatives Produkt geben.

§. 15.

Wenn mehrere Größen mit einander multiplizirt werden sollen, so schreibt man die Buchstaben neben einander, und giebt dem Produkte das Zeichen $+$, wenn sie sämmtlich positiv sind, oder sich eine gerade Anzahl negativer Factoren dabei befinden; das Pro-

duct erhält aber das Zeichen —, wenn die Anzahl der negativen Factoren ungerade ist.

So ist $a \times + b \times + c = abc$; $a \times - b \times - c \times + d = + abcd$, denn es giebt $+ a \times - b = - ab$, $- ab \times - c = + abc$ und $+ abc \times + d = + abcd$. Hingegen ist $+ a \times - b \times + c \times - d \times - f = - abcdf$ denn es ist $+ a \times - b = - ab$, $- ab \times + c = - abc$, $- abc \times - d = + abcd$ und $+ abcd \times - f = - abcdf$.

§. 16.

Wenn die Factoren Coefficienten haben, so schreibt man die Buchstaben neben einander, giebt ihnen das Produkt aller Coefficienten zum Coefficienten, und bestimmt das Zeichen nach vorigen §. So ist $5a \times + 7b = 35ab$; $3a \times - 5b \times + 7c = - 105abc$; $7ab \times - 3c + 4d \times - f = 84abcdf$.

Nach den Grundsätzen der gemeinen Arithmetik ändert die Ordnung, in welcher man die Factoren in einander multiplicirt, das Produkt nicht, mithin kann man setzen

$5a \times + 7b = 5 \cdot 7 \cdot + a. + b = 35 \times + ab = 35ab$
$3a \times - 5b \times + 7c = 3 \cdot 5 \cdot 7 \times + a \times - b \times + c = 105 \times - abc = - 105abc$
$7ab \times - 3c \times + 4d \times - f = 7 \times 3 \times 4 \times + ab \times - c \times + d \times - f = 84 \times + abcdf = 84abcdf$.

§. 17.

Wenn Factoren, welche einander gleich sind, und daher durch gleiche Buchstaben ausgedrückt sind, in einander multiplicirt werden sollen, so schreibt man den Buchstaben nur einmal, setzt demselben zur Rechten oberhalb die Zahl, welche anzeigt, wie viel dergleichen Factoren in einander multiplicirt worden, und bestimmt das Zeichen nach § 15. daher ist $+ a \times + a = + a^2$; $+ a \times - a \times - a = + a^3$;

$+7a \times -2a \times +4a = -56a^3$, $-4a \times -7a = +28a^2$.

Die Zahl, welche hier die Anzahl der gleichen Factoren anzeigt, nennt man: den Exponenten, und die Producte von gleichen Factoren: Potenzen oder *Dignitäten*. Eine Größe auf irgend eine Dignität *erheben*, heißt daher, dieselbe so oft als Factor nehmen, *als* der Exponent anzeigt. In Rücksicht dieser Potenz heißt der Factor, aus dessen Multiplication die Potenz entstanden, die so vielte Wurzel als der Exponent anzeigt.

Wenn man eine negative Größe zum Quadrat, oder zur zweiten Potenz erhebt, so wird das Quadrat jederzeit positiv, denn nach §. 14 ist $-a \times -a = +aa = +a^2$; da nun ebenfalls $+a \times +a = +aa = +a^2$, so kann ein jedes Quadrat zwei Wurzeln haben, davon die eine positiv, die andere negativ ist, welches die Mathematiker auszudrücken pflegen $\sqrt{a^2} = \pm a$. Welche von diesen beiden Wurzeln die verlangte ist, muß die Bedingung der Aufgabe entscheiden.

§. 18.

Wenn Größen, welche durch gleiche Buchstaben ausgedrückt sind, und Exponenten haben, in einander multiplicirt werden sollen, so schreibt man den Buchstaben nur einmal, und giebt ihm die Summe der Exponenten zum Exponenten; den Coefficienten und das Zeichen bestimmt man nach dem vorhergehenden.

So ist $+a^2 \times +a^5 = +a^7$ und $+4a^3 \times -9a^5 = -36a^8$ denn es ist $a^2 \times +a^5 = aa + aaaaa = aaaaaaa = a^7$, und $4a^3 \times -9a^5 = 4 \times -9 \times aaa \times aaaaa = -36 \times aaaaaaaa = -36a^8$.

§. 19.

Wenn das Multiplicandum aus mehreren Theilen besteht, welche durch die Zeichen + und — mit einander verbunden sind, der Multiplicator aber besteht nur aus einem Theile, so muß (Arith. §. 50) das ganze Multiplicandum, d. h. alle einzelne Theile desselben, mit dem Multlipicator multipliciret werden. Man bestimmt demnach das Product eines jeden einzelnen theils mit dem Multiplicator, und verbindet sie, nachdem es ihre gefundenenen Zeichen erfordern.

Es sey $(a+b+d) \times c$ gegeben, so ist $a \times c = ac$, $b \times c = bc$ und $d \times c = dc$, also $(a+b+d) \times c = ac + bc + dc$

Eben so ist $(3ab + 5bc - 4cd) 9gf = 27abgf + 45bcgf - 36cdgf$; $(7a^2b - 9cd + 3ab^2 - 6df) \times -3abd = -21a^3b^2d + 27abd^2c - 9a^2b^3d + 18abd^2f$.

§. 20.

Besteht sowohl das Multiplicandum als der Multiplicator aus mehreren Theilen, so muß man nach und nach jeden Theil des Multiplicandum mit jedem Theile des Multiplicaters multipliciren (Arith. §. 51.) Man bestimmt daher nach und nach jeden einzelnen Theil mit seinem Zeichen nach vorhergehenden Gründen, nnd verbindet sie mit einander, wie die Zeichen es erfordern.

Wäre $(3ab + 7b - 13cd + 9a^2b) \times (6ab^2 - 3ad + b^2)$ gegeben, so setze man zu besserer Uebersicht, die Factoren, wie in der gemeinen Arithmetik unter einander,

als

$$
\begin{array}{r}
\text{zu } 3ab + 7b - 13cd + 9a^2b \\
6ab^2 - 3ad + b^2 \\
\hline
18a^2b^3 + 42ab^3 - 78ab^2cd + 54a^3b^3 \\
-9a^2bd - 21abd + 39acd^2 - 27a^3bd \\
+3ab^3 + 7b^3 - 13b^2cd + 9a^2b^3 \\
\hline
27a^2b^3 + 45ab^3 - 78ab^2cd + 54a^3b^3 - 9a^2bd - 21abd + 39acd^2 \\
-27a^3bd + 7b^3 - 13b^2cd
\end{array}
$$

hierauf multiplicirt man alle Theile des Multiplicandum mit dem ersten Theile $6ab^2$ des Multiplicators, davon die Produkte in der ersten Reihe stehen, sodann mit dem zweiten Theile $-3ad$, davon die Produkte in der zweiten Reihe stehen, und endlich mit dem dritten Theile b^2, wovon sich die Produkte in der dritten Reihe befinden. Alle diese einzelnen Theile addire man, und bringe sie, nachdem man sie nach §. 9 möglichst abgekürzt, in eine Reihe unterhalb, so giebt diese Reihe das gesuchte Produkt.

Beispiele.

1. $(b^2cx - 3b^2x^2) \times (cx - 3x^3)$;

$$
\begin{array}{r}
b^2cx - 3b^2x^2 \\
cx - 3x^3 \\
\hline
b^2c^2x^2 - 3b^2cx^3 \\
-3b^2cx^4 + 9b^2x^5 \\
\hline
b^2c^2x^2 - 3b^2cx^3 - 3b^2cx^4 + 9b^2x^5
\end{array}
$$

2. $(3a^2b - 6abc + 3bc^2) \times (4a^2 - 5c^2)$

$$
\begin{array}{r}
3a^2b - 6abc + 3bc^2 \\
4a^2 - 5c^2 \\
\hline
12a^4b - 24a^3bc + 12a^2bc^2 \\
-15a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4 \\
\hline
12a^4b - 24a^3bc - 3a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4
\end{array}
$$

3. $(a^2 + ab + b^2).(a - b)$;

$$
\begin{array}{r}
a^2 + ab + b^2 \\
a - b \\
\hline
a^3 + a^2b + ab^2 \\
-a^2b - ab^2 - b^3 \\
\hline
a^3 - b^3
\end{array}
$$

4. $(a^2b+3ab-5bd)\cdot(a^2-ac+bc)$

$$\begin{array}{l} a^2b+3ab-5bd \\ a^2-ac+bc \\ \hline a^4b+3a^3b-5a^2bd \\ -a^3bc-3a^2bc+5abcd \\ a^2b^2c+3ab^2c-5b^2cd \\ \hline a^4b+3a^3b-5a^2bd-a^3bc-3a^2bc+5abcd+a^2b^2c \\ +3ab^2c-5b^2cd \end{array}$$

5. $(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)\times(a^2-2ab+b^2)$

$$\begin{array}{l} a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ a^2-2ab+b^2 \\ \hline a^5+3a^4b+3a^3b^2+a^2b^3 \\ -2a^4b-6a^3b^2-6a^2b^3-2ab^4 \\ +a^3b^2+3a^2b^3+3ab^4+b^5 \\ \hline a^5+a^4b-2a^3b^2-2a^2b^3+ab^4+b^5 \end{array}$$

Zuweilen trifft man Größen an, bei denen ihre Theile durch Parenthesen so verwickelt scheinen, daß es einem Anfänger schwer wird, die beabsichtigte Verbindung der Theile zu erkennen, zumal wenn Parenthesen in Parenthesen vorkommen. Es wird daher nicht überflüssig seyn, durch einige Beispiele zu zeigen, wie dergleichen Ausdrücke zu verstehen sind, und wie man die Parenthesen wegschaffen kann.

Der Ausdruck $x\big(x(x+1)+2(x+1)\big)$ bedeutet, daß $x+1$ soll multiplicirt werden mit x, sodann $x+1$ multiplicirt mit 2; das Zeichen $+$ zwischen diesen beiden Theilen zeigt, daß beide Produkte addirt werden sollen, und endlich zeigt die äußerste Parenthese, daß man die Summe der in derselben vorgestellten Produkte noch mit x multipliciren soll. Nach dieser Erklärung ist $x\big(x(x+1)+2(x+1)\big) = x(x^2+x+2x+2) = x(x^2+3x+2) = x^3+3x^2+3x$.

Eben so bedeutet der Ausdruck $y\left[2y(y+1)+(y+1)\right]$ daß von $2y$ und $y+1$ das Product gemacht, dazu $y+1$ addirt, und diese Summe mit y mul-

tiplicirt werden soll. Es ist also $y\,[2y(y+1)+(y+1)] = y(2y^2+2y+y+1) = y(2y^2+3y+1) = 2y^3+3y^2+y$.

Beispiele.

1. $[((3am(a+b-1)+4a^2-b)3a^2b+3a(b+c))7b+3c]x =$
$[((3a^2m+3abm-3am+4a^2-b)3a^2b+3ab+3ac)7b+3c]x =$
$[(9a^4bm+9a^3b^2m-9a^3bm+12a^4b-3a^2b^2+3ab+3ac)7b+3c]x =$
$(63a^4b^2m+63a^3b^3m-63a^3b^2m+84a^4b^2-21a^2b^3+21ab^2+21abc+3c)x =$
$63a^4b^2mx+63a^3b^3mx-63a^3b^2mx+84a^4b^2x-21a^2b^3x+21ab^2x+21abcx+3cx$

2. $[((a-b).(a^2+2ab+b^2)+a+b)(a-b)+3c](x-1) =$
$[(a^3+a^2b-ab^2-b^3+a+b)(a-b,+3c](x-1) =$
$(a^4-2a^2b^2+a^2+b^4-b^2+3c(x-1) =$
$a^4x-2a^2b^2x+a^2x+b^4x-b^2x+3cx-a^4+2a^2b^2-a^2-b^4+b^6-3c$

3. $[(a^2+2ab+b^2).(a+b)+(a^2-2ab+b^2).(a-b)]y =$
$(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,y =$
$(2a^3+6ab^2)\text{-}y = 2a^3y+6ab^2y.$

Von der Division.

§. 21.

Dividiren heißt: zu zweien gegebenen Größen eine dritte finden, welche so aus der einen entsteht, als die Einheit aus der andern.

Die hier gegebenen Größen heißen: das Dividendum, die Größe, welche dividirt werden soll, der Divisor, die Größe, welche dividiren soll, und die gesuchte heißt der Quotient. Es soll der Quotient aus dem Dividendum eben so entstehn, als die Einheit aus dem Divisor.

Denkt man dieser gegebenen Erklärung näher nach, so findet man, daß Dividiren nichts anders heißen, als zum Divisor, der Einheit und dem Dividendum eine vierte Proportional-Größe zu bestimmen. Wäre daher a das Dividendum, b der Divisor, so würde man setzen $b : 1 = a : \frac{a}{b}$, wo $\frac{a}{b}$ der Quotient ist.

§. 22.

Die Einheit wird auch hier positiv angenommen, und gilt hier, für die Zeichen + und — in Absicht der Entstehung der Einheit aus dem Divisor, alles was §. 14 in Ansehung der Entstehung des Multiplikators aus der Einheit gesagt worden ist.

Es kommen in dieser Rechnungsart die nemlichen Fälle vor, welche wir bei der Multiplikation angetroffen haben, nemlich es kann

$+a$ zu dividiren seyn durch $+b$
$+a$ „ „ „ „ $-b$
$-a$ „ „ „ „ $+b$ und
$-a$ „ „ „ „ $-b$.

Um nun die Quotienten für diese Fälle zu bestimmen, würden wir nach vorigen §. schließen

$$+b:+1=+a:+\frac{a}{b}$$

$$-b:+1=+a:-\frac{a}{b}$$

$$+b:+1=-a:-\frac{a}{b}$$

$$-b:+1=-a:+\frac{a}{b}.$$

Von der Richtigkeit der hier angegebenen Quotienten, wird man sich leicht überzeugen, wenn man die §. 14 geführten Beweise in Erwegung zieht. Man sieht zugleich hier, daß, wenn die gegebenen Größen gleiche Zeichen haben, der Quotient das Zeichen +, wenn sie aber ungleiche Zeichen haben, das Zeichen — erhalten müsse.

§. 23.

Ist das Dividendum dem Divisor gleich, so wird der Quotient 1. (gem. Arith.) und zwar + 1 wenn beide Zeichen gleich, — 1 aber, wenn die Zeichen beider gegebenen Größen ungleich sind. Daher ist $\frac{+a}{+a}=+1$; $\frac{-a}{-a}=+1$, $\frac{+a}{-a}=-1$ und $\frac{-a}{+a}=-1$ und eben so $\frac{+abd}{+abd}=+1$, $\frac{-a^3b^2d}{-a^3b^2d}=+1$ $\frac{+bef^2}{-bcf^2}=-1$ und $\frac{-ad^2f^3}{+ad^2f^3}=-1$.

§. 24.

Ist das Dividendum ein Buchstabe mit einem Exponenten, und der Divisor ist durch den nemlichen Buchstaben ausgedrückt, sein Exponent aber ist kleiner als der des Dividendum, so wird der Quotient durch den nemlichen Buchstaben angegeben, dem man die Differenz beider Exponenten zum Exponenten giebt, und das Zeichen nach dem vorhergehenden bestimmt.

Hiernach ist $\frac{+a^5}{+a^2} = +a^{5-2} = +a^3$, denn es ist $\frac{+a^5}{+a^2} = \frac{aaaaa}{aa} = \frac{a^2\,a^3}{a^2} = 1 \times a^3 = a^3$ weil nach vorigen §. $\frac{a^2}{a^2} = 1$ ist. Eben so ist $\frac{-b^7}{-b^4} = +b^3$ weil $\frac{-b^7}{-b^4} = \frac{-b^4\,4b^3}{-b^4} = 1 \times b^3$ ist, daher $\frac{-b^7}{-b^3}$ $= +b^{7-4} = b^3$; $\frac{+a^8}{-a^5} = \frac{-a^5 \times -a^3}{-a^5} = 1 \times$ $-a^3 = -a^3$, mithin $\frac{+a^8}{-a^5} = -a^{8-5} = -a^3$ und $\frac{-a^6}{+a^4} = \frac{+a^4 \times -a^2}{+a^4} = 1 \times -a^2 = -a^2$, also $\frac{-a^6}{+a^4} = -a^{6-4} = -a^2$.

Sind bei gleichen Buchstaben der gegebenen Größen die Exponenten im Dividendum und Divisor einander gleich, so wird der Quotient durch den nemlichen Buchstaben mit dem Exponenten o angegeben.

So würde $\frac{a^4}{a^4} = a^{4-4} = a^0$ $\frac{-a^5}{-a^5} = +a^{5-5} = a^0$;

$\frac{+b^6}{-b^6} = -b^{6-6} = -b^0$ und $\frac{-b^7}{+b^7} = -b^{7-7} = -b^0$ seyn.

Da nun nach vorigen §. allgemein $\frac{a^n}{a^n} = 1$ ist, so folgt, daß jede Größe mit dem Exponenten $o = 1$ sey, und umgekehrt, daß man 1 durch jeden Buchstaben mit dem Exponenten o ausdrücken kann.

Ist bei gleichen Buchstaben der gegebenen Größen der Exponent des Divisors größer, als der des Dividendum, so kann der Quotient auf zweierlei Art angegeben werden, und zwar ist derselbe entweder ein Bruch, dessen Zähler 1, der Namen aber der gemeinschaftliche Buchstabe ist, welcher die Differenz der Exponenten zum Exponenten erhielt, oder der Quotient wird ganz allgemein durch den gemeinschaftlichen Buchstaben angegeben, dem man die Differenz der Exponenten mit dem Zeichen — zum Exponenten giebt, das Zeichen des Quotienten wird nach den obigen Grundsätzen bestimmt.

Hiernach ist $\frac{a^5}{a^7} = \frac{1}{a^2}$, denn es ist $\frac{a^5}{a^7} = \frac{a^5 \times 1}{a^5 \times a^2} = \frac{a^5}{a^5} \times \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a^2}$ oder $\frac{-a^3}{-a^7} = \frac{-a^3 \times +1}{-a^3 \times +a^4} = \frac{-a^3}{-a^3} \times \frac{1}{a^4} = \frac{1}{a^4}$, oder $\frac{+a^5}{-a^7} = \frac{+a^5 \times +1}{+a^5 \times -a^2} = \frac{a^5}{a^5} \times \frac{+1}{-a^2} = 1 \times \frac{+1}{-a^2} = -\frac{1}{a^2}$ und eben so $\frac{-b^4}{+b^7} = \frac{+b^3 \times -1}{+b^3 + +b^4} = \frac{b^3}{b^3} \times \frac{-1}{+b^4} = 1 \times \frac{-1}{+b^4} = -\frac{1}{b^4}$ nach der erster Bestimmungs-Art des Quotienten.

$\frac{a^5}{a^7} = a^{5-7} = a^{-2}$, $\frac{-a^3}{-a^7} = + a^{3-7} = a^{-4}$ oder $\frac{+a^5}{-a^7} = - a^{5-7} = - a^{-2}$ und $\frac{-b^3}{+b^7} = - b^{3-7} = - b^{-4}$ nach der zweiten Bestimmungs-Art.

Hieraus folgt, daß $\frac{1}{b^4} = b^{-4}$, und $\frac{-1}{+a^3} = - a^{-3}$ und allgemein $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$ so wie $b^{-m} = \frac{1}{b^m}$ angegeben werden können.

§. 25.

Hat das Dividendum und der Divisor Coefficienten, so bestimmt man zuerst den Quotienten der Coefficienten, sodann den der Buchstaben. Die Bestimmung der Zeichen bleibt wie oben.

So ist $\frac{27a^3}{9a} = 3a^2$, weil $\frac{27a^3}{9a} = \frac{9a \times 3a^2}{9a} = \frac{9a}{9a} \times \frac{3a^2}{1} = 3a^2$ eben so $\frac{-105b^5}{-35b^4} = +3b$, oder $\frac{+78a^3}{-13a^7} = -\frac{6}{a^4}$ und $\frac{-125a^5}{+500a^7} = -\frac{1}{4a^2}$

§. 26.

Sind die gegebenen Größen durch die Multiplikation anderer Factoren entstanden, und es finden sich im Dividenden und Divisor gleiche Factoren, so heben sich diese gegen einander auf, und von den übrig bleibenden bleibt die Division bloß angedeutet.

Diesem nach ist $\frac{35a^3bc^2d^4}{7a^2b^2cd^3} = \frac{7a^2bcd^3 \times 5acd}{5a^2bcd^3 \times b}$ $= \frac{5acd}{b}$ und $\frac{-48a^4b^3cd^5}{-8a^3b^2d^5} = \frac{-8a^3b^2d^5 \times +6abc}{-8a^3b^2d^5 \times +1}$ $= +6abc$ eben so ist $\frac{+7a^2d^3f}{-21a^3bcd^4f^2} =$ $\frac{+7a^2d^3f \times +1}{+7a^2d^3f \times -3abcdf} = \frac{+1}{-abcdf} = -\frac{1}{3abcdf}$ und $\frac{-5a^2b^3d}{+20abc^2d^3f} = \frac{+5abd \times +ab^2}{+5abd \times +4c^2d^2f} =$ $\frac{-ab^2}{+4c^2d^2f} = -\frac{ab^2}{4c^2d^2f}$.

§. 27.

Besteht das Dividendum aus mehreren Theilen, der Divisor aber nur aus einem Theile, so muß nach den Grundsätzen der gemeinen Arithmetik, jeder Theil des Dividendum durch den ganzen Divisor dividirt werden. Man vergleicht daher jeden einzelnen Theil des Dividendum mit dem Divisor, und bestimmt nach obigen Grundsätzen die Theile des Quotienten, welche man sodann nach ihren Zeichen zusammensetzt.

So würde $\frac{3abc + 15a^2b^3c - 9ab^2d}{3ab} =$ $\frac{3abc}{3ab} + \frac{15a^2b^3c}{3ab} - \frac{9ab^2d}{3ab} = c + 5ab^2c$ $- 3bd$ gefunden werden. eben so würde $\frac{72a^2b + 18ab^3c - 27abcd^3}{-36ab^2c} = \frac{72a^2b}{-36ab^2c} +$ $\frac{18ab^3c}{-36ab^2c} - \frac{27abcd^3}{-36ab^2c} = -\frac{2a}{bc} - \frac{b}{2} + \frac{3d^3}{4b}$

Desgleichen würde

$$\frac{-375a^7b^2c+50a^2b^6d-45a^4b^4c^2f+30ab^3f^2}{60a^5bc^2d^3fg} =$$

$$-\frac{375a^7b^2c}{60a^5bc^2d^3fg}+\frac{50a^2b^6d}{60a^5bc^2d^3fg}-\frac{45a^4b^4c^2f}{60a^5bc^2d^3fg}$$

$$+\frac{30ab^3f^2}{60a^5bc^2d^3fg}=-\frac{25a^2b}{4cd^3fg}+\frac{5b^5}{6a^3c^2d^2fg}$$

$$-\frac{3b^3}{4ad^3g}+\frac{b^2f}{2a^4c^2d^3g}$$ seyn.

Betrachtet man die in den beiden letztern Beispielen angegebenen Quotienten, so sieht man leicht, daß sie für den Gebrauch nicht am bequemsten ausgedrückt sind, da jeder Theil des Quotienten ein Bruch ist, und weil alle diese Brüche nicht einerley Benennung haben. Da es nur in der allgemeinen Arithmetik vorzüglich nothwendig ist, die gesuchten Größen so einfach als möglich darzustellen, das heißt so, daß es mit den wenigsten Schwierigkeiten verbunden seyn würde, ihren Werth anzugeben, wenn man in die Stelle der Buchstaben Zahlen setzen wollte, so mußte man auf eine andere Art der Bestimmung des Quotienten für diesen Fall denken.

Des thut man auf folgende Art: Man untersucht, ob im Divisor, und zugleich auch in jedem Theile des Dividendum gleiche Buchstaben angetroffen werden, und wenn dies ist, so streicht man sie gegeneinander im Divisor, so wie in jedem Theile des Dividendum weg. Die übrig bleibenden Theile geben sodann den Quotienten in der einfachsten Form an. Hiernach ist

$$\frac{72a^2b+18ab^3c-27abcd^3}{-36ab^2c}=\frac{8a+2b^2c-3cd^3}{-4bc}$$ und

$$\frac{-375a^7b^2c+50a^2b^6d-45a^4b^4c^2f+30ab^3f^2}{60a^5bc^2d^3fg} =$$

$$\frac{-75a^6bc+10ab^5d-9a^3b^3c^2f+6b^2f^2}{12a^4c^2d^3fg}.$$

Um sich von der Richtigkeit dieser gefundenen Quotienten zu überzeugen, schließe man: wenn mehrere Produkte addirt oder subtrahirt werden sollen, so kann man, nach Grundsätzen der gemeinen Arithmetik, die ungleichen Factoren addiren oder subtrahiren, und deren Summe oder Differenz mit dem gemeinschaftlichen Factor multipliciren. Findet man nun, daß in dem ersten Beispiele $9ab$ der gemeinschaftliche Factor ist, welcher im Divisor und zugleich in jedem Theile des Dividendum enthalten ist, so muß

$$\frac{72a^2b+18ab^3c-27abcd^3}{-36ab^2c}=\frac{(8a+2b^2c-2cd^3)\times+9ab}{-4bc\times+9ab}=$$

$$\frac{8a+2b^2c-3cd^3}{-4bc}\times\frac{9ab}{9ab}=\frac{8a+2b^2c-3cd^3}{-4bc}$$ seyn.

Und wenn in dem zweiten Beispiele $5ab$ dieser Factor ist, so ist

$$\frac{-375a^7b^2c+50a^2b^6d-45a^4b^4c^2f+30ab^3f^2}{60a^5bc^2d^3fg}=$$

$$\frac{(-75a^6bc+10ab^5d-9a^3b^3c^2f+6b^2f^2)\times+5ab}{12a^4c^2d^3fg\times5ab}=$$

$$\frac{-75a^6bc+10ab^5d-9a^3b^3c^2f+6b^2f^2}{12a^4c^2d^3fg}.$$

§. 28.

Betrachtet man das Verfahren bei Bestimmung der Quotienten in allen bis hieher abgehandelten Fällen, so wird man gewahr, daß dies jederzeit geschieht, indem man das Dividendum und den Divisor in gewisse Factoren zerlegt, und die gemeinschaftlichen gegen einander wegstreicht. Hierdurch wird der Quotient nicht geändert, da man das Dividendum und den Divisor zu-

gleich verkleinert. Dies fand in den bisherigen Fällen auch keine Schwierigkeit, da man nicht nöthig hatte, die Größen in alle ihre einzelnen Factoren zu zerlegen. Wird es aber zur Bestimmung einer Rechnung, oder zur Abkürzung eines Quotienten erfordert, eine Größe in alle ihre einzelnen Factoren zu zerlegen, so ist dies oft mit großen Schwierigkeiten verbunden, und diese Operation erfordert vielen Scharfsinn und eine vorzügliche Uebung, welche man besonders durch vieles Multipliciren erlangen kann. Zum Beweise mögen folgende Beispiele dienen.

1. $2ax - 3dgx = (2a - 3dg)x$
2. $6ab^2 - 12abc - 3ab = (2b - 4c - 1) \times 3ab$
3. $ax + x^2 = (a + x)x$
4. $y - by = (1 - b)y$
5. $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = (a + b)a + (a + b)b$
   $= (a + b)\cdot(a + b)$
6. $c^2 - 2cy^2 + y^4 = c^2 - cy^2 - cy^2 + y^4 = (c - y^2)c - (c - y^2)y^2 =$
   $(c - y^2)\cdot(c - y^2) = (c - y^2)^2$
7. $a^2 - x^2 = a^2 + ax - ax - x^2 = a(a + x) - x(a + x) = (a + x)\cdot(a - x)$
8. $a^4 - y^2 = (a^2 + y)\cdot(a^2 - y)$; desgleichen $x^2 - 1 = (x + 1)\cdot(x - 1)$
9. $x^3 + 3x^2 + 2x = x(x^2 + 3x + 2) = x(x^2 + x + 2x + 2)$
   $= x\big(x(x + 1) + 2(x + 1)\big) = x(x + 1)\cdot(x + 2)$
10. $2y^3 + 3y^2 + y = y(2y^2 + 3y + 1) = y(2y^2 + 2y + y + 1) =$
   $y[2y(y + 1) + (y + 1)] = y\cdot(y + 1)\cdot(2y + 1)$.

Oft ist es gut, wenn man während dem Gange der Rechnung nicht alle Multiplikationen verrichtet, sondern dieselbe blos andeutet, weil hierdurch die einzelnen Factoren weniger versteckt werden, und leichter aufzufinden sind, wenn ihre Zerlegung erfordert wird.

§. 29.

Wenn sowohl das Dividendum als der Divisor Größen sind, welche aus mehreren Theilen zusammengesetzt sind, so tritt der in vorigen §. angemerkte Fall

ein, wo es oft erfordert wird, eine zusammengesetzte Zahl von mehreren Theilen in ihre einzelne Factoren zu zerlegen, daher denn dieser Fall der Division am schwersten, und oft mit vielen Unbequemlichkeiten verbunden ist, wenn man den Quotienten irgend einfach darstellen will.

Um diesen Fall aufzulösen, unrersuche man zuerst im Allgemeinen, ob im Dividendum und Divisor gleiche Buchstaben vorkommen, denn ist dies nicht, so findet durchaus keine Abkürzung statt, und man muß die Division blos andeuten.

Findet man nun im Dividendum und Divisor gleiche Buchstaben, so sucht man beide in ihre einfachen Faktoren zu zerlegen, und findet man unter diesen gleiche Factoren im Dividendum und Divisor, so streicht man diese gemeinschaftlichen gegen einander weg, wodurch die Division verrichtet, und der Quotient am einfachsten dargestellt ist, je genauer man der gegebenen Regel nachgekommen ist.

So ist $b^2c^2x^2 - 3b^2cx^3 - 3b^2cx^4 + 9b^2x^5 : b^2cx - 3b^2x^2 =$
$b^2x(c^2x - 3cx^2 - 3cx^3 + 9x^4) : b^2x(c - 3x) =$
$b^2x[cx(c - 3x) - 3x^3(c - 3x)] : b^2x(c - 3x) =$
$b^2x.(c - 3x).(cx - 3x^3) : b^2x(c - 3x) = cx - 3x^3.$

Eben so ist.

$$\frac{12a^4b - 24a^3bc - 3a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4}{3a^2b - 6abc + 3bc^2} =$$

$$\frac{3b(4a^4 - 8a^3c - a^2c^2 + 10ac^3 - 5c^4)}{3b(a^2 - 2ac + c^2)} =$$

$$\frac{3b(4a^4 - 8a^3c + 4a^2c^2 - 5a^2c^2 + 10ac^3 - 5c^4)}{3b(a^2 - 2ac + c^2)} =$$

$$\frac{3b[4a^2(a^2 - 2ac + c^2) - 5c^2(a^2 - 2ac + c^2)]}{3b(a^2 - 2ac + c^2)} =$$

$$\frac{3b(a^2 - 2ac + c^2).(4a^2 - 5c^2)}{3b(a^2 - 2ac + c^2)} = 4a^2 - 5c^2.$$

§. 30.

Glaubt man wegen Gleichheit einiger Buchstaben im Dividendum und Divisor, daß die Division wohl aufgehen könne, so verrichtet man auch wohl die Division auf ähnliche Art, wie in der gemeinen Arithmetik. In diesem Falle ordnet man zuerst das Dividendum und den Divisor nach einerley darin vorkommenden Buchstaben, nemlich man schreibt die Theile sowohl im Dividendum, wie im Divisor in der Ordnung, daß die größte Dignität dieses Buchstaben in dem ersten Theile, und in den nächst folgenden Theilen auch immer die nächst kleinere Potenz desselben vorkommt.

Ist dies geschehen, so dividirt man den ersten Theil des Dividendum mit dem ersten Theile des Divisor, so ergiebt sich der erste Theil des Quotienten.

Mit diesem gefundenen Theile multiplizirt man den ganzen Divisor, und subtrahirt ihn allgebraisch vom Dividendum.

In dem Reste wähle man wieder ein Glied, welches nemlich nunmehr die höchste Potenz des Buchstaben enthält, wonach die Größen geordnet, dieses dividire man wieder durch den ersten Theil des Divisors, so erhält man den zweiten Theil des Quotienten. Mit diesem multiplicirt man wiederum den Divisor, und subtrahirt das Produkt von dem vorigen Rest.

Mit dem neuen Rest verfährt man wie das erste und zweitemal, und setzt auf diese Weise die Rechnung so lange fort, bis entweder alles aufgeht, oder man einen Rest übrig behält, von den man sich nicht versprechen darf, daß durch Fortsetzung der Rechnung die Division aufgehen werde. Im letztern Falle muß man den letztern Rest, als Zähler eines Bruchs ansehen, demselben den Divisor als Nenner untersetzen,

und mit gehöriger Bestimmung des Zeichen + oder — dem Quotienten anhangen. Folgende Beispiele werden dies weiter erläutern.

Beispiele.

1. $(b^2c^2x^2 - 3b^2cx^3 - 3b^2cx^4 + 9b^2x^5) : (b^2cx - 3b^2x^2)$ geordnet nach dem Buchstaben x

$$3b^2x^2 + b^2cx \text{ Divisor}$$

$$\text{Dividendum } 9b^2x^5 - 3b^2cx^4 - 3b^2cx^3 + b^2c^2x^2 \mid -3x^3 + cx \text{ Quotient}$$

$$+9b^2x^5 - 3b^2cx^4$$

$$-3b^2cx^3 + b^2c^2x^2$$

$$-3b^2cx^3 + b^2c^2x^2$$

$$0.$$

2. $(30abc^3 - 24a^3bc - 15bc^4 + 12a^4b - 3a^2bc^2) : (3a^2b + 3bc^2 - 6abc)$ geordnet nach dem Buchstaben a

$$3a^2b - 6abc + 3bc^2$$

$$12a^4b - 24a^3bc - 3a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4 \mid 4a^2 - 5c^2$$

$$12a^4b - 24a^3bc + 12a^2bc^2$$

$$-15a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4$$

$$-15a^2bc^2 + 30abc^3 - 15bc^4$$

$$0.$$

3. $(a^3 - b^3) : a - b,$

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{c}{a - b} \\
a^3 - b^3 & a^2 + ab + b^2 \\
a^3 - a^2 b & \\
\hline
+ a^2 b - b^3 & \\
a^2 b - a b^2 & \\
\hline
+ a b^2 - b^3 & \\
a b^2 - b^3 & \\
\hline
0. &
\end{array}
$$

4. $(6a^2 - ax + ab - x^2) : (3a + x)$ geordnet nach den Buchstaben x

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{c}{x + 3a} \\
- x^2 - ax + 6a^2 + ab & - x + 2a + \frac{ab}{x + 3a} \\
- x^2 - 3ax & \\
\hline
+ 2ax + ba^2 + ab & \\
2ax + 6a^2 & \\
\hline
+ ab &
\end{array}
$$

5.

$$
\begin{array}{l|l}
\multicolumn{2}{r}{a^2 b + 3ab - 5bd} \\
a^4 b + 3a^3 b - a^3 bc - 5a^2 bd + a^2 b^2 c - 3a^2 bc + 3ab^2 c + 5abcd - 5b^2 cd & a^2 \\
a^4 b + 3a^3 b - 5a^2 bd & - ac \\
\hline
- a^3 bc + a^2 b^2 c - 3a^2 bc + 3ab^2 c + 5abcd - 5b^2 cd & + bc \\
- a^3 bc \quad - 3a^2 bc \quad + 5abcd & \\
\hline
a^2 b^2 c + 3ab^2 c - 5b^2 cd & \\
a^2 b^2 c + 3ab^2 c - 5b^2 cd & \\
\hline
0. &
\end{array}
$$

6.

6. $(27a^2b^3 + 45ab^3 - 78ab^2cd + 54a^3b^3 - 9a^2bd - 21abd + 39acd^2 - 27a^3bd + 7b^3 - 13b^2cd) :$
$(6ab^2 - 3ad + b^2)$ geordnet nach den Buchstaben a

$$6ab^2 - 3ad + b^2$$

$$54a^3b^3 - 27a^3bd + 27a^2b^3 - 9a^2bd + 45ab^3 - 78ab^2cd - 21abd + 39acd^2 - 13b^2cd \quad 7b^3 \;\Big|\; 9a^2b$$

$$\underline{54a^3b^3 - 27a^3bd + 9\;a^2b^3} \qquad +3ab$$

$$+18a^2b^3 - 9a^2bd + 45ab^3 - 78ab^2cd - 21abd + 39acd^2 - 13b^2cd + 7b^3 \qquad +7b$$

$$\underline{18a^2b^3 - 9a^2bd + 3\;ab^3} \qquad -13cd$$

$$+42ab^3 - 78ab^2cd - 21abd + 39acd^2 - 13b^2cd + 7b^3$$

$$\underline{42ab^3 \qquad -21abd \qquad +7b^3}$$

$$-78ab^2cd + 39acd^2 - 13b^2cd$$

$$\underline{-78ab^2cd + 39acd^2 - 13b^2cd}$$

$$0.$$

Von den Gleichungen.

§. 31.

Wenn man zwei Verbindungen von Größen, deren Gleichheit sich entweder durch die Bedingungen der Aufgabe, oder auf irgend eine andere Art unbezweifelt darthun läßt, durch das Zeichen der Gleichheit mit einander verbindet, so nennt man den erhaltenen Ausdruck eine Gleichung.

Weiß man demnach, oder läßt es sich aus Bedingungen darthun, daß a so groß ist, als $b+c-d$, oder daß $a+d$ so groß sey, als $b+c$, oder daß a^3b+4ab^3 so groß sey, als $(a^2+4b^2)\times ab$, so sind $a=b+c-d$; $a+d=b+c$ und $a^3b+4ab^3=(a^2+4b^2)\times ab$ Gleichungen.

Die ganze Verbindung von Größen, welche auf einer Seite des Zeichens der Gleichheit steht, nennt man: einen Theil der Gleichung, und es besteht daher eine jede Gleichung aus zween Theilen.

Alle einzelne Theile aber, welche sich in der Gleichung befinden, und durch die Zeichen $+$ und $-$ mit einander verbunden sind, nennt man Glieder der Gleichung. Hierbei ist zu bemerken, daß alle Verbindungen der Größen durch die Multiplication und Division, so wie alle Größen welche in einer Parenthese stehen, nur als ein Glied zu betrachten sind. So besteht die Gleichung $a^3b+4ab^3=(a^2+4b^2)\times ab$ aus den beiden Theilen a^3b+4ab^3 und $(a^2+4b^2).ab$ sie hat aber drei Glieder, nemlich a^3b, $4ab^3$ und $(a^2+4b^2).ab$.

§. 32.

Man bedient sich der Gleichungen, um Aufgaben, theils aus dem gemeinen Leben, theils aus der Mathe-

matik auf eine bequemere Art aufzulösen, und für gewisse von daher abgeleitete Aufgaben, Regeln oder Formeln zu berechnen, durch deren Hülfe alle dahin gehörige Aufgaben leicht berechnet werden können. Der Nutzen der Gleichungen ist übrigens keinem Zweifel unterworfen, denn man findet schon im gemeinen Leben häufig Aufgaben, welche ohne Gleichungen nur sehr schwer, zuweilen auch gar nicht aufgelöst werden können.

Der Zweck der Gleichungen ist: für eine oder einige unbekannte Größen, eine Verbindung von bekannten Größen zu bestimmen. Daher ist es nothwendig, die Größen so zu bezeichnen, daß die unbekannten von den bekannten leicht zu unterscheiden sind. Man bezeichnet dieserhalb die unbekannten Größen jederzeit durch die leztern Buchstaben des kleinen lateinischen Alphabeths x, y, z und u, die bekannten aber mit den erstern Buchstaben.

Jemehr unbekannte Größen in einer Aufgabe vorkommen, je schwerer wird ihre Auflösung. Es ist also nothwendig, die Aufgaben genau zu prüfen, und wenn zwei oder mehrere unbekannte Größen darin vorkommen, zu untersuchen, ob nicht eine durch die andere bestimmt wird, so daß durch die Kenntniß der einen, die andere mit bekannt ist, damit man nicht mehrere unbekannte Größen annehme, als eigentlich in der Aufgabe vorhanden sind, und durch unrichtige Bezeichnung die Auflösung erschwere.

§. 33.

Findet man in einer Gleichung die unbekannte Größe nur allein auf dem ersten Grade, so sagt man: die Gleichung ist vom ersten Grade. Ist die unbekannte Größe in der Gleichung auf einer gewissen Potenz erhoben, es kommt aber nur diese Potenz dersel-

ben allein vor, so heißt die Gleichung eine reine Gleichung von dem Grade der unbekannten Größe. Kommen aber in einer Gleichung mehrere Potenzen der unbekannten Größe zugleich vor, so heißt sie: eine verwickelte Gleichung von dem Grade der höchsten Potenz der unbekannten Größe.

Dieser Erklärung nach sind $x + a - b = c + d$ und $ax + \frac{bx}{c} - d = a - c + d$ Gleichungen vom ersten Grade; $x^2 + \frac{a-b}{c} x^2 = a^2 - b^2 + c$ so wie $\frac{adx^2 + 3ax^2 - ab}{2b} = a^2 b + 3c$, reine Gleichungen vom zweiten Grade; $x^n + mx^n = p + q$ eine reine Gleichung vom $n$ten Grade, und $x^2 + mx = p - q$ eine verwickelte quadratische Gleichung, so wie $x^4 + 2x^3 + 7x = m + q$ eine verwickelte Gleichung vom vierten Grade.

§. 34.

Die Gleichungen werden aus den Bedingungen der Aufgabe hergeleitet, welche entweder aus dem gemeinem Leben, oder aus irgend einem Fache der Mathematik genommen werden. Im erstern Falle setzt dies eine genaue Kenntniß aller aus der gemeinen Arithmetik abgeleiteten Rechnungsarten, im letztern aber zugleich die Kenntniß der Wissenschaft voraus, aus der die Bedingungen der Aufgabe entnommen sind.

Ueber die Mittel, zu den Gleichungen zu gelangen, läßt sich wenig sagen, und bleibt dies mehrentheils dem Scharfsinne eines jeden überlassen, die Mittel aufzusuchen, welche ihm entweder die gemeine Arithmetik, oder die Wissenschaft, zu der die Aufgabe gehört, dar-

bietet. Der Weg im Allgemeinen ist: man sucht aus den Bedingungen der Aufgabe zweierley einander gleiche Verbindungen der unbekannten Größe, und verbindet diese gefundenen Ausdrücke durch das Zeichen der Gleichheit. Würde z. E. die Aufgabe gegeben: Es hat jemand eine Anzahl junger Bäume, von denen er eine Pflanzung dergestalt anlegen will, daß in jeder Reihe gleichviel Bäume zu stehn kommen; besetzt er nun mit diesen Bäumen 6 Reihen, so bleiben ihm 5 übrig, will er aber 7 Reihen damit besetzen, so fehlen ihm noch 8 Bäume. Wie viel Bäume hat er überhaupt gehabt, und wie viel hat er in jeder Reihe setzen können?

Da hier die ganze Anzahl Bäume, so wie die Anzahl in *einer* Reihe gesucht wird, so scheint es, als wenn die Aufgabe zwei unbekannte Größen enthielte. Prüft man aber die Aufgabe genauer, so findet sich, daß die Anzahl Bäume sich aus der Anzahl in einer Reihe ergiebt, daher man diese Anzahl, als die unbekannte Größe annehmen, und mit x bezeichnen kann. Hierauf sucht man den Bedingungen der Aufgabe gemäß, zwei Verbindungen von x, welche sich in diesem Falle leicht ergeben. Sie sind nemlich $6x + 5 = 7x - 8$, wodurch die Gleichung bestimmt ist.

§. 35.

Hat man erst aus den Bedingungen der Aufgabe die Gleichung gefunden, so ist in den mehrsten Fällen das schwerste gethan, denn die Auflösung derselben beruht sodann nur auf wenige Grundsätze.

Eine Gleichung ist aufgelöst, wenn die unbekannte Größe auf einer Seite des Zeichens der Gleichheit ganz allein, mit dem Zeichen + auf der ersten Potenz stehet, auf der andern Seite aber sich lauter bekannte Größen befinden, oder wenn sie die Form hat

$x = \frac{a+b-c}{d}$ oder $x = \frac{(5+7-3).8}{18}$; denn nimmt man mit den bekannten Größen die durch die Zeichen angegeben Veränderungen wirklich vor, so ist der Werth von x bestimmt. So zeigen in $x = \frac{(5+7-3).8}{18}$ die Zeichen, daß man 5, 7 und -3 addiren, die Summe 9 mit 8 multipliciren, und das Produkt 72 durch 18 dividiren soll, wodurch 4 für den Werth von x gefunden wird.

Die Regeln zur Auflösung der Gleichungen beruhen auf folgende Grundsätze, als:

Gleiches zu Gleichem addirt, oder davon subtrahirt giebt Gleiches;

Gleiches mit Gleichem multiplicirt oder dividirt giebt Gleiches;

von gleichen Größen bringen die gleich hohen Potenzen, so wie die gleich niedrigen Wurzeln, wieder gleiche Größen hervor.

Auflösung der Gleichungen vom ersten Grade.

§. 36.

Ist die unbekannte Größe mit andern bekannten durch die Zeichen + und — verbunden, so schreibe man alle bekannte Größen des Theils, worin die unbekannte Größe steht, mit dem entgegengesetzten Zeichen in den andern Theil der Gleichung, oder auf die andere Seite des Zeichens der Gleichheit. Wäre also $a+x-b+c$

$= d$ gegeben, so würde $x = d - c + b - a$ seyn. Um sich hiervon zu überzeugen, erinnere man sich der im vorigen §. gegebenen Grundsätze, nach welchen Gleiches zu Gleichem addirt oder davon subtrahirt, Gleiches hervorbringt. Subtrahirt man nun auf beiden Seiten der Gleichung $c = c$, so ist $a + x - b + c - c = d - c$ oder $a + x - b = d - c$, addirt man hierauf in beiden Theilen $b = b$, so erhält man $a + x - b + b = d - c + b$ oder $a + x = d - c + b$, subtrahirt man endlich in beiden Theilen $a = a$, so wird $x + a - a = d - c + b - a$, oder $x = d - c + b - a$ wie oben angegeben, gefunden.

Auf gleiche Weise wird in $x - a - b + c - d = f$, $x = f + a + b - c + d$ und in $a + x + b - c - d = g$, $x = g + c + d - a - b$, so wie in $7x - 8 = 6x + 5$ oder $7x - 6x = 5 + 8$, $x = 5 + 8 = 13$ gefunden.

Wenn man das Zeichen eines jeden Gliedes der Gleichungen in das entgegengesetzte verwandelt, so wird die Gleichung nicht aufgehoben, denn man kann sich vorstellen, daß man nach und nach jedes Glied aus einem Theile der Gleichung auf vorbeschriebene Art in den andern Theil gebracht habe. Auf diese Weise erhält man für $a - x + b - c - d = g$ die Gleichung $-a + x - b + c + d = -g$ woraus $x = a + b - c - d - g$ gefunden wird, welches man gleichfalls findet, wenn in der gegebenen Gleichung $x = x$ addirt, und sodann $g = g$ wieder subtrahirt.

§. 37.

Ist die unbekannte Größe mit bekannten durch die Multiplication verbunden, so wird sie durch die Division wieder davon gelöst, indem man die ganze Gleichung, d. h. jedes Glied derselben, mit dem

Coefficienten von x dividirt. Wäre demnach $ax + bx - c = d$ gegeben, so ist $ax + bx = d + c$. Erinnert man sich nun aus der Multiplication, wenn zwei oder mehrere Produkte, welche einen gemeinschaftlichen Factor haben, addirt oder subtrahirt werden sollen, daß man die Summe oder Differenz der ungleichen Factoren mit dem gemeinschaftlichen Factor multipliciren kann, oder daß jederzeit $am \pm bm = (a \pm b)m$ ist, so findet man aus obiger Gleichung $(a + b)x = d + c$ und wenn man auf beiden Seiten mit $a + b$ dividirt $x = \frac{d+c}{a+b}$. Eben so ist $19x + 36 - 7x - 15 = 141$, oder $19x - 7x = 141 + 15 - 36$ oder $(19 - 7)x = 120$ woraus $x = \frac{120}{12} = 10$ gefunden wird.

Ist die unbekannte Größe mit andern bekannten Größen durch die Division verbunden, so wird sie durch die Multiplication davon los gemacht, wenn man die ganze Gleichung mit dem Divisor derselben multiplicirt. Wäre $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} - cd = f$ gegeben, so ist $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = f + cd$. Bringt man die Brüche unter einerlei Benennung, so erhält man $\frac{bx + ax}{ab} = f + cd$, multiplicirt man auf beiden Seiten mit ab, so ist $bx + ax = (f + cd)\,ab$ oder $(b + a)x = (x + cd)\,ab$; und wenn man endlich mit $b + a$ dividirt, so findet man $x = \frac{(f+cd)ab}{b+a}$. Eben so ist $\frac{x}{a} - \frac{bx}{c} + d = g$, oder $\frac{x}{a} - \frac{bx}{c} = g - d$ und

$\frac{cx-abx}{ac}=g-d$, oder $cx-abx=(g-d)ac$ und $(c-ab)x=(g-d)ac$ und $x=\frac{(g-d)ac}{c-ab}$.

auf gleiche Art giebt $\frac{x}{b}+ax-c+d=f$ oder $\frac{x}{b}+ax=f+c-d$, oder $\frac{x+abx}{b}=f+c-d$ oder $x+abx=(f+c-d)b$ oder $(1+ab)x=(f+c-d)b$ oder $x=\frac{(f+c-d)b}{1+ab}$.

§. 38.

Mit den reinen Gleichungen von höhern Graden verfährt man auf die nemliche Art; nemlich man bringt die unbekannte Größe mit ihrem Exponenten zuförderst nach den in §. 36 und 37 gegebenen Regeln, auf eine Seite des Zeichens der Gleichheit allein und wenn dies geschehen, so nimmt man von beiden Theilen die Wurzel, welche der Exponent der unbekannten Größe erfordert. Hierdurch wird nach dem §. 35 gegebenen Grundsatze die Gleichung nicht gehoben, man erhält x rein oder ohne Exponenten, und die Gleichung ist aufgelößt.

Wäre $\frac{ax^2}{b}+ab=h-\frac{cdx^2}{g}$ gegeben, so ist $\frac{ax^2}{b}+\frac{cdx^2}{g}=h-ab$ oder $\frac{agx^2+bcdx^2}{bg}=h-ab$ oder $(ag+bcd)x^2=bgh-ab^2g$ und $x^2=\frac{bgh-ab^2g}{ag+bcd}$ woraus endlich $x=\sqrt{\frac{bgh-ab^2g}{ag+bcd}}$ gefunden wird.

Bei dem hier für x gefundenen Werth ist zu bemerken:

1) Daß derselbe jederzeit auf zweierlei Art, entweder mit dem Zeichen $+$ oder mit dem Zeichen $-$ angenommen werden kann, wenn die Dignität von x gerade ist. Denn in diesem Falle entsteht x^n aus einer geraden Anzahl Factoren, und kann daher die Wurzel nach §. 17 sowohl $-x$ als $+x$ seyn. Dies drückt man dadurch aus, daß man vor dem Wurzelzeichen beide Zeichen setzt, um dadurch anzudeuten, daß beide Werthe Statt finden können. Daher ist in unserm Beispiele $x = \pm\sqrt{\frac{bgh - ab^2 g}{ag + bcd}}$.

2) Findet es sich, daß man von einer negativen Größe eine gerade Wurzel nehmen soll, z. E. die Quadratwurzel, so ist diese unmöglich, weil weder die positive noch die negative Wurzel ein negatives Quadrat geben kann. Dergleichen Ausdrücke als $\sqrt{-a}$ nennt man immaginaire Größen, und wenn man in eine Rechnung darauf stößt, kann man jederzeit überzeugt seyn, daß die verlangte oder gesuchte Größe unter den obwaltenden Bedingungen nicht möglich sey.

So würde in unserm Beispiele x einen immaginairen Werth erhalten, wenn $bgh < ab^2 g$ gefunden würde; wenn aber $bgh > ab^2$ ist, einen wirklichen Werth erhalten, welcher jedoch sowohl positiv als negativ seyn kann, welches jederzeit die Umstände entscheiden müssen.

Die nähere Auseinandersetzung der verschiedenen Werthe der höhern Wurzeln, kann ich hier füglich über-

gehen, da sie nicht zum Zwecke des gegenwärtigen gehören.

Wäre $\frac{x+ax}{b}x+ab=cd$ gegeben, so ist $(x+ax)x=(cd-ab)b$ oder $x^2+ax^2=bcd-ab^2$ oder $(1+a)x^2=bcd-ab^2$, und $x^2=\frac{bcd-ab^2}{1+a}$ daher $x=\pm\sqrt{\frac{bcd-ab^2}{1+a}}$. Auf gleiche Art verfährt man, wenn $\frac{ax^n}{b}+\frac{cx^n}{d}+ab=\frac{x^n}{e}+ac-d$ gegeben wäre, nemlich $\frac{ax^n}{b}+\frac{cx^n}{d}-\frac{x^n}{e}=ac-d+ab$ oder $\frac{adex^n+cbex^n-bdx^n}{bde}=ac-d+ab$ oder $(ade+cbe-bd)x^n=(ac-d+ab)bde$ und $x=\sqrt[n]{\frac{(ac-d+ab)bde}{ade+cbe-bd}}$.

Von den verwickelten quadratischen Gleichungen.

§. 39.

Wenn man die zweitheilige Größe $x+a$ mit sich selbst multiplicirt, oder zum Quadrat erhebt, so findet man, daß $(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$ sey; und wenn man $x-a$ zum Quadrat erhebt, so ist $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$.

Hieraus folgt, daß $x^2 \pm 2ax + a^2$ jederzeit ein vollständiges Quadrat seyn muß.

Betrachtet man dieses Quadrat genau, so findet sich, daß die Wurzel jederzeit besteht aus $\sqrt{x^2}$ und $\sqrt{a^2}$, und daß man diese beiden Theile durch das Zeichen von $\pm ax$ mit einander verbinden müsse. So sieht man aus $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$, daß man die Theile der Wurzel mit dem Zeichen von $+ax$ oder mit $+$, und bei $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$, mit dem Zeichen von $-ax$ oder mit $-$ verbinden muß. Bei genauer Betrachtung findet man ferner, daß der dritte Theil a^2 allemal das Quadrat des halben Coefficienten vom mittlern Gliede $2ax$, und daß x^2 ohne Coefficienten sey.

Hieraus wird man folgern können

a) Eine Verbindung von Größen sey ein wirkliches Quadrat, wenn sie aus drei Gliedern besteht, wovon das erste das Quadrat der unbekannten Größe ohne Coefficienten, das zweite ein Produkt irgend einer bekannten Größe mit der unbekannten, oder die unbekannte Größe mit irgend einem Coefficienten, und das dritte Glied das Quadrat des halben Coefficienten von der unbekannten Größe im zweiten Gliede sey, und daß das zweite Glied sowohl positiv als negativ seyn könne, die andern beiden aber jederzeit positiv seyn müssen, oder daß allgemein ein jedes wirkliches Quadrat die Form $x^2 \pm px + \frac{1}{4}p^2$ haben müsse.

b) Daß man von einem wirklichen Quadrate jederzeit die Wurzel bestimme, wenn man die Wurzel des ersten Gliedes und die Wurzel des dritten Gliedes mit dem Zeichen des mittlern verbindet, wenn die Glieder nach obiger Form geordnet worden.

§. 40.

In vorigem §. liegt genau die ganze Regel zur Auflösung der verwickelten quadratischen Gleichungen, und würde heißen:

1) Man gebe der Gleichung die Form $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = Q$, so daß auf der einen Seite des Zeichens der Gleichheit ein vollständiges Quadrat von der unbekannten Größe mit irgend einer bekannten Größe, auf der andern aber sich bloß bekannte Größen befinden.

2) Wenn dies geschehn, so nehme man von beiden Theilen der Gleichung die Quadratwürzel, und zwar von dem ersten Theil nach vorigem §. *b* und

3) Trenne man endlich noch die in der Wurzel vorkommende bekannte Größe von der unbekannten nach den gegebenen Gründen.

Da die beiden letztern Punkte auf bereits bekannten Gründen beruhen, so wird es hauptsächlich darauf ankommen, zu zeigen, wie man verfahren müsse, um einer verwickelten quadratischen Gleichung die vorgeschriebene Form zu geben, welches wir in Folgendem durch ein Beispiel näher auseinander zu setzen bemüht seyn werden.

Fände man aus den Bedingungen einer Aufgabe die Gleichung $\frac{(ax + ab)x}{cd} + ad = fg$, so würde nach obigen Gründen seyn $(ax + ab)x = (fg - ad)cd$ oder $ax^2 + abx = cdfg - acd^2$, eine Gleichung, worin der erste Theil kein vollständiges Quadrat ist. Um es aber dazu zu machen, schaffe man zuerst den Coefficienten von x^2 weg, indem man jedes Glied durch den-

selben dividirt. Hierdurch erhält man $x^2 + \frac{abx}{a} = \frac{cdfg - acd^2}{a}$ oder $x^2 + bx = \frac{cdfg - acd^2}{a}$.

In dem ersten Theile dieser Gleichung fehlt nun noch das dritte Glied, welches nach §. 39 jederzeit das Quadrat des halben Coefficienten von dem zweiten Gliede seyn muß. Addirt man nun auf beiden Seiten das Quadrat von $\frac{b}{2}$ oder $\frac{1}{4}b^2$, so erhält man $x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 = \frac{cdfg - acd^2}{a} + \frac{1}{4}b^2$ oder $x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 = \frac{(cdfg - acd^2)4 + ab^2}{4a}$ eine Gleichung, welche genau die vorgeschriebene Form hat.

Nimmt man nun aus beiden Theilen die Quadratwurzel, so ist nach vorigen §. b; $x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{(cdfg - acd^2)4 + ab^2}{4a}}$ woraus endlich $x = \pm\sqrt{\frac{(cdfg - acd^2)4 + ab^2}{4a}} - \frac{b}{2}$ gefunden wird.

Beispiele zur Uebung.

1) Eine Zahl zu finden, die um ihre Hälfte vermehrt, 12 giebt. Es sey die gesuchte Zahl $= x$, so ist ihre Hälfte $= \frac{1}{2}x$ und laut Bedingung $x + \frac{1}{2}x = 12$ oder $2x + x = 24$ oder $3x = 24$, mithin $x = 8$.
2) Eine Zahl finden, welche durch 3 getheilt eben so viel giebt, als wenn man 30 von ihr subtrahirt.

Wenn x diese Zahl ist, so ist nach der Bedingung $\frac{x}{3} = x - 30$, woraus $x = 3x - 90$ oder $2x = 90$ oder $x = 45$ gefunden wird.

3) Es wurde jemand um seine monatliche Einnahme befragt, und er antwortete: die Hälfte, das Drittel und das Viertel übersteigt die Einnahme selbst um $1\frac{1}{4}$ Thaler. Wie viel hatte er monatliche Einnahme?

Es sey die monatliche Einnahme x Thaler, so ist nach der Bedingung $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1\frac{1}{4}$, und wenn man die Brüche unter einerley Benennung bringt und sie addirt, $\frac{6x + 4x^2 + 3x}{12} = x + 1\frac{1}{4}$, daher $13x = 12x + 15$, mithin $13x - 12x = 15$, also $x = 15$ Thaler.

4) Es wurde jemand um sein Alter befragt, und er antwortete: wäre ich noch einmal so alt, als ich wirklich bin, so hätte ich eben so viel über 100 Jahre, als mir jetzt noch daran fehlen. Wie alt war er?

Es sey sein Alter x Jahre, und da sein doppeltes Alter 100 um eben so viel übertreffen soll, als ihm jetzt noch daran fehlen, so wird $2x - 100 = 100 - x$ seyn, woraus $3x = 200$ und $x = 66\frac{2}{3}$ Jahre gefunden wird.

5) Ein Vater war bestürzt, daß er schon dreimal so alt sey, als sein Sohn, doch tröstet er sich damit, daß er nach 15 Jahren nur noch einmal so alt, als sein Sohn seyn werde. Wie alt war jeder von beiden?

Da mit dem Alter des Sohnes zugleich das Alter des Vaters bekannt ist, so darf man nur eine unbekannte Größe in diesem Beispiele annehmen; man nenne daher das Alter des Vaters x, so ist des Sohnes Alter $\frac{1}{3}x$. In 15 Jahren wird der Vater $x + 15$ und der Sohn $\frac{1}{3}x + 15$ alt seyn, da aber in dieser Zeit der Vater noch einmal so alt, als der Sohn seyn soll, so muß $x + 15 = (\frac{1}{3}x + 15)2$ seyn, woraus $x + 15 = \frac{2}{3}x + 30$ oder $x - \frac{2}{3}x = 30 - 15$, oder $\frac{1}{3}x = 15$, mithin $x = 45$ gefunden wird. Der Vater war daher 45 und der Sohn $\frac{45}{3} = 15$ Jahre alt.

6) Es hat jemand eine Anzahl Bäume, welche er auf einem viereckigten Platze dergestalt pflanzen will, daß in jeder Reihe gleichviel Bäume stehen, und daß die Pflanzung ein Quadrat machen soll. Pflanzt er nun eine bestimmte Anzahl Bäume in einer Reihe, so behält er 19 Bäume übrig, wenn er aber einen Baum mehr in der Reihe nimmt, so fehlen ihm 14 Bäume. Wie groß ist die Anzahl Bäume gewesen?

Man setze die Anzahl Bäume, welche er das erstere mal in einer Reihe setzen kann $= x$, so ist die um 1 größere Anzahl $= x + 1$, und da die Bäume im Quadrat gesetzt werden sollen, so drückt x^2 die Summe aller Bäume in einem Quadrat, und $(x + 1)^2$ im andern Quadrate aus. Da er nun im erstern Falle noch 19 Bäume übrig behielt, im letztern ihm aber noch 14 Bäume fehlten, so drückt $x^2 + 19$ so wie $(x - 1)^2 - 14$ die ganze Anzahl Bäume aus, und es ist

$x^2 + 19 = (x + 1)^2 - 14$ oder

$x^2 + 19 = x^2 + 2x + 1 - 14$ oder

$x^2 + 19 = x^2 + 2x - 13$ oder

$19 + 13 = x^2 + 2x - x^2$; mithin ist

$32 = 2x$, und $x = 16 =$ die Anzahl Bäume in einer Reihe, daher ist $16 \times 16 + 19$ oder $17 \times 17 - 14 = 275$ die ganze Anzahl Bäume gewesen.

7) Ein Frauenzimmer wurde um ihr Alter befragt, und antwortete: meine Mutter hat mich im 40sten Jahre ihres Alters geboren, und wenn man meine Jahre mit den Jahren meiner Mutter multiplicirt, so erhält man Methusalems Alter, welcher 969 Jahre gelebt hat. Wie alt war jede?

Es sey die Tochter x Jahre alt, so ist die Mutter $40 + x$, mithin nach der Bedingung $x(x + 40) = 969$, daher $x^2 + 40x = 969$ eine verwickelte quadratische Gleichung. Macht man nach §. 40 den erstern Theil zum vollständigen Quadrate indem man auf beiden Seiten $(\frac{40}{2})^2$ addirt, so erhält man $x^2 + 40x + 400 = 969 + 400 = 1369$.

Nimmt man auf beiden Seiten die Quadratwurzel, so ergiebt sich $x + 20 = \pm\sqrt{1369} = \pm 37$, mithin $x = \pm 37 - 20$, also entweder $+37 - 20 = 17$ oder $-37 - 20 = -57$. Prüft man die beiden für x gefundenen Werthe, so ergiebt sich, daß der Werth $+17$ den Bedingungen Genüge leistet, und es ergiebt sich 17 für das Alter der Tochter, und $40 + 17 = 57$ Jahre für das Alter der Mutter.

8) Ein Courier, welcher vor 3 Tagen abgegangen ist, und alle 5 Stunden 3 Meilen geht, soll durch

einen zweiten eingeholt werden, der alle 3 Stunden 2 Meilen geht, in wie viel Tagen wird er den ersten einholen?

Da der erste Courier schon 3 Tage voraus hat, so berechne man den Weg, welchen er in dieser Zeit zurückgelegt hat, indem man setzt 5 Stunden : 72 Stunden $=$ 3 Meilen : $\frac{3 \cdot 72}{5} = 43\frac{1}{5}$ Meilen. Hierauf setze man die Zeit, in welcher er eingeholt werden wird $= x$, und berechne den Weg, welchen der erste Courier noch in dieser Zeit zurücklegen wird. Man setze also

5 Stunden : x Stunden $=$ 3 Meilen : $\frac{3}{5}x$ Meilen.

Der ganze Weg, welchen der erste Courier also bis er eingeholt wird, zurückgelegt haben wird, und welchen der zweite also auch machen muß, ist also $43\frac{1}{5} + \frac{3}{5}x$.

Da der zweite Courier jede 3 Stunden 2 Meilen geht, so setze man: 3 Stunden : x Stunden $=$ 2 Meilen : $\frac{2}{3}x$ Meilen $=$ den Weg des zweiten Couriers. Da nun dieser gefundene Weg des zweiten Couriers, mit dem oben angegebenen einerley seyn muß, so ergiebt sich die Gleichung $43\frac{1}{5} + \frac{3}{5}x = \frac{2}{3}x$, woraus man $43\frac{1}{5} = \frac{2}{3}x - \frac{3}{5}x$ oder wenn man alle Brüche unter einerlei Benennung bringt $\frac{648}{15} = \frac{10}{15}x - \frac{9}{15}x = \frac{1}{15}x$, und wenn man die ganze Gleichung mit 15 multiplicirt, $648 = x$ oder $\frac{648}{24} = 27$ Tage, woraus man die Anzahl Meilen leicht bestimmen kann.

Diese Aufgabe läßt sich auf einem andern Wege noch auflösen, man berechne nemlich zuerst nach den angegebenen Datis, wie viel Meilen beide Couriers in einerlei Zeit gehen werden, z. E. wie viel beide ein jeder in 5 Stunden gehen werden, welches von dem ersten schon bekannt ist. Man setze nemlich $3 : 5 = 2 : 3\frac{1}{3}$ Meilen, Weg welchen, der zweite Courier in 5 Stunden zurücklegt.

Nachdem man nun, wie oben, den Weg, welchen, der erste Courier schon voraus hat, berechnet, schließe man: wenn x der Weg ist, welchen der erste Courier noch zu gehen hat, von der Zeit an, wo der zweite abgeht, bis er eingeholt wird, so wird in dieser Zeit der zweite Courier den Weg $x + 43\frac{1}{5}$ zurücklegen müssen. Da nun x und $x + 43\frac{1}{5}$ beides Wege sind, welche die Couriers in gleichen Zeiten machen, so müssen sie auch mit denen, welche beide in 5 Stunden gehen, in gleichem Verhältnisse stehen, und daher $3\frac{1}{3} : 3 = x + 43\frac{1}{5} : x$ seyn, schließt man nun nach dem Satze der Proportionen $3\frac{1}{3} - 3 : 3 = x + 43\frac{1}{5} - x : x$, so erhält man die Proportion $\frac{1}{3} : 3 = 43\frac{1}{5} : x$ oder $5 : 9 = 216 : x$ woraus $x = \frac{216 \times 9}{5} = 388\frac{4}{5}$ gefunden wird.

Diese Beispiele werden hinreichend seyn, die Behandlung der Gleichungen so weit daraus kennen zu lernen, als sie zur Erläuterung des folgenden nothwendig sind. Wir wenden uns daher jetzt zu den Progressionen, um aus ihnen die Logarithmen, so wie die zur Detaxation der Forsten nothwendigen Rechnungsarten abzuleiten,

Zweiter Abschnitt.

Auseinandersetzung der arithmetischen und geometrischen Progressionen.

Von den arithmetischen Verhältnissen, Proportionen und Progressionen.

§. 41.

Wenn man bei der Vergleichung zweier gleichartigen Größen bestimmt, um wie viel die eine Größe größer oder kleiner ist, als die andere, so bestimmt man ihr arithmetisches Verhältniß. (Arithm. §. 150) Dies Verhältniß drückt man dadurch aus, daß man die beiden Glieder durch das Zeichen der Subtraction mit einander verbindet. Hierdurch zeigt man zugleich an, daß das Resultat dieser Vergleichung gefunden werde, wenn man das zweite Glied von dem ersten subtrahirt; dieses Resultat nennt man die Differenz oder den Nahmen des Verhältnisses. Wenn nun a und b die verglichenen Größen, und d die Differenz ist, so wird

$a - b$ ein arithmetisches Verhältniß ausdrücken, und die Differenz entweder $+ d$ seyn, wenn a größer als b ist, oder $- d$ wenn $b > a$ ist.

Denkt man der gegebenen Erklärung des Verhältnisses genau nach, so findet man, daß jederzeit ganz allgemein das zweite Glied entstehen müsse, wenn man die Differenz von dem ersten Gliede subtrahirt, daher wird man auch allgemein ein jedes arithmetische Verhältniß durch $a - (a \mp d)$ vorstellen können, je nachdem man die Differenz entweder $+ d$ oder $- d$ antrifft.

§. 42.

Zwei Verhältnisse sind einander gleich, wenn sie entweder gleiche positive oder gleiche negative Differenzen haben. So sind die Verhältnisse $9 - 5$ und $12 - 8$ einander gleich, weil in beiden die Differenz $= + 4$ ist, und eben so sind $7 - 10$ und $9 - 12$ einander gleich, weil beider Differenzen $= - 3$ angetroffen wird.

Verbindet man zwei gleiche Verhältnisse durch das Zeichen der Gleichheit, so erhält man eine Verhältnißgleichung, welche man Proportion nennet. Diesemnach sind $9 - 5 = 12 - 8$ und $7 - 10 = 9 - 12$ und allgemein $a - b = c - d$ Proportionen.

Sind bei einer Proportion alle Glieder verschiedener Größe, so nennt man sie eine abgesonderte Proportion, von der Art ist $a - b = c - d$. Sind die mittlern Glieder einander gleich, so wird die Proportion stätig oder zusammenhängend genannt, und von dieser Art ist $a - b = b - c$, welche man auch durch $\div a, b, c$ auszudrücken pflegt.

Da nach vorigen §. allgemein ein Verhältniß durch $a - (a \mp d)$ angegeben wird, so wird man durch

$a - (a \mp d) = c - (c \mp d)$ eine abgesonderte, und durch $a - (a \mp d = (a \mp d) - (a \mp 2\,d)$ oder durch $\div a,\ a \mp d,\ a \mp 2\,d$ eine stätige Proportion ganz allgemein vorstellen können.

§. 43.

Bei jeder Proportion ist die Summe der äußern Glieder der Summe der mittlern gleich (Arith. §. 163) daher ist in der abgesonderten Proportion $a - b = c - d$, $a + d = b + c$, und in der stätigen $a - b = b - c$, $a + c = b + b = 2\,b$.

Setzt man in der Gleichung $a + d = b + c$ nach und nach jedes Glied als unbekannt an, so erhält man $a = b + c - d$; $d = b + c - a$; $b = a + d - c$ und $c = a + d - b$. Man findet daher ein jedes fehlende Glied einer abgesonderten Proportion, wenn es ein äußeres ist, wenn man von der Summe der mittlern das bekannte äußere subtrahirt, wenn es aber ein mittleres ist, indem man von der Summe der äußern des bekannte mittlere Glied subtrahirt. Verfährt man eben so mit der Gleichung $a + c = 2\,b$, so ergiebt sich für die stätige Proportion $a = 2\,b - c$; $c = 2\,b - a$ und $b = \frac{a + c}{2}$ Man findet diesemnach ein jedes fehlende Glied einer stätigen Proportion, wenn es ein äußeres ist, wenn man von dem doppelten mittlern das bekannte äußere subtrahirt, und wenn es das mittlere ist, indem man von der Summe der äußern die Hälfte nimmt. Soll zwischen zweien gegebenen Zahlen die arithmetisch mittlere Proportionalzahl gesucht werden, so betrachtet man die gegebenen Zahlen jederzeit, als die äußern Glieder einer stätigen Proportion, und findet sie daher allemal, wenn man von der Summe der gegebenen die Hälfte nimmt.

§. 44.

Siehet man bei einer stätigen Proportion blos auf die verschiedenen Glieder, so findet man nach §. 42, daß jedes folgende Glied entweder um die Differenz größer oder kleiner ist, als das vorangehende, und daß daher die Glieder sämmtlich bestimmt sind, sobald man nur das erste Glied und die Differenz der Proportion kennt. Wäre daher b das erste Glied und d die Differenz, so würde $\div\ b,\ b \mp d,\ b \mp 2d,$ die stätige Proportion seyn. Wäre $b = 75,\ d = +4,$ so würde $\div\ 75, 71, 67$ die Proportion seyn; und wäre $b = 75,$ $d = -4,$ so würde $\div\ 75,\ 79,\ 83$ gefunden werden.

§. 45.

Eben so wie man aus dem ersten Gliede und der Differenz die drei Glieder der stätigen Proportion bestimmte, eben so kann man auch noch ein viertes, fünftes, und so viel man immer will von stätigen Proportional-Gliedern bestimmen, wenn man immer zu dem zuletzt gefundenen noch die Differenz addirt, oder davon subtrahirt.

Hierdurch würde man allgemein die Reihe von stätigen Proportional-Gliedern $\div\ a,\ a \mp d,\ a \mp 2d,$ $a \mp 3d,\ a \mp 4d,\ a \mp 5d,$ rc. finden; diese Reihen nennt man Progreßionen oder auch Reihen. Hieraus folgt, daß eine arithmetische Reihe oder Progreßion nichts anders ist, als eine Reihe von Größen, wovon jede zwei unmittelbar folgenden in einerlei arithmetischen Verhältniße stehen.

Ist die Differenz der Reihe positiv, so, daß also die folgenden Glieder kleiner als die vorangehenden werden, so sagt man: die Progreßion sey abnehmend. Dergleichen Reihe würde seyn $\div\ 75,\ 71,\ 67,\ 63,\ 59,$

55, 51, 47 ꝛc. ꝛc. und allgemein würde man sie durch ÷ a, $a-d$, $a-2d$, $a-3d$, $a-4d$ ꝛc. ꝛc. vorstellen. Ist hingegen die Differenz der Reihe negativ, und daher jedes folgende Glied größer als das vorangehende, so nennt man die Reihe: eine zunehmende oder wachsende, auch steigende Progreßion, und diese würde seyn, ÷ 75, 79, 83, 87, 91, 95, 99 ꝛc. ꝛc. und allgemein würde man sie durch ÷ a, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, $a+4d$, $a+5d$ ꝛc. ꝛc. vorstellen.

§. 46.

Denkt man der Entstehung der Progreßion nach, so findet man, daß die ganze Progreßion bestimmt ist, wenn nur ein Glied, und die Differenz gegeben sind. Denn findet man in der zunehmenden Reihe, daß jedes folgende Glied um die Differenz größer als das vorangehende ist, so ist das vorangehende im Gegentheil um die Differenz kleiner als das folgende. Hieraus folgt, daß man jedes Glied dieser Reihe wird bestimmen können; denn wenn man zu dem gegebenen die Differenz addirt, so bestimmt man dadurch ein folgendes Glied, und wenn man nach und nach zu jedem folgenden wieder die Differenz addirt, so wird man auch nach und nach alle folgenden Glieder bestimmen können. Wenn man aber von dem gegebenen die Differenz subtrahirt, so bestimmt man dadurch das vorangehende Glied, und man wird durch die Subtraction der Differenz von jedem neugefundenen auf gleiche Art, alle vorangehende Glieder bestimmen können. Eben dies findet bei einer abnehmenden Progreßion statt, und es werden hier die folgenden Glieder bestimmt werden, wenn man von dem gegebenen, so wie von jedem neugefundenen, die Differenz subtrahirt, die vorangehenden aber, wenn man zu dem gegebenen, und zu jedem zuletzt gefundenen noch die Differenz addirt.

Wåhre daher von einer zunehmenden Progression 75 als ein Glied, und 4 als Differenz gegeben, so wůrden dadurch $75+4=79$, $79+4=83$, $83+4=87$, $87+4=91$ ꝛc. als die folgenden Glieder und $75-4=71$, $71-4=67$, $67-4=63$, $63-4=59$ ꝛc. als vorangehende Glieder gefunden werden.

Und wenn 75 als ein Glied einer abnehmenden Reihe und 4 als deren Differenz gegeben wåre, so wůrde man durch $75-4=71$, $71-4=67$, $67-4=63$, $63-4=59$ ꝛc. ꝛc. die folgenden Glieder und durch $75+4=79$, $79+4=83$, $83+4=87$ ꝛc. die vorangehenden Glieder bestimmen.

Aus dem so eben gesagten folgt 1) daß wenn man der beschriebenen Operation keine Grenzen setzt, man nach und nach jede Menge, sowohl folgender als vorangehender Glieder bestimmen kann, oder welches einerlei ist, daß man jede Reihe auf beiden Seiten bis ins Unendliche wird fortsetzen kőnnen. 2) Bei genauer Vergleichung der beiden beschriebenen Reihen findet man, daß alle vorangehende Glieder der zunehmenden Reihe, mit den folgenden der abnehmenden und umgekehrt gleich sind. Man wird also daraus folgen kőnnen, daß jedesmal eine abnehmende Progression eine Fortsetzung der zunehmenden auf der entgegengesetzten Seite seyn werde, wenn beide ein gemeinschaftliches Glied haben, und ihre Differenzen außer ihrer positiven oder negativen Eigenschaft einander gleich sind. Und 3) wird folgen, daß alle Eigenschaften, welche man bei der zunehmenden Reihe antreffen wird, auch auf die abnehmende wird angewendet werden kőnnen, so daß man also nur die Eigenschaften der zunehmenden Reihe wird zu untersuchen haben.

Wenn man eine zunehmende Reihe auf die entgegengesetzte Seite fortsetzt, so werden die gefundenen

Glieder immer kleiner, und man wird endlich auf ein Glied stoßen, welches entweder 0 oder wenigstens kleiner als die Differenz seyn wird. Wenn man nun die Operation weiter fortsetzt, so werden die nun noch vorangehenden Glieder nach §. 9. negativ werden müssen, weil $0-4=-4$ oder $1-4=-3$ und $-3-4=-7$ rc. gefunden worden.

§. 47.

Betrachtet man die Glieder der Progression $a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, a+6d, a+7d, a+8d$, rc. genau, so bemerkt man, daß jedes Glied das erste Glied enthalte, und daß zu diesem, in jedem folgendem, die Differenz noch so oft addirt ist, als dem Gliede noch Glieder vorangehen. So finden wir, daß das sechste Glied außer dem ersten Gliede a, die Differenz noch 5 mal, und das neunte Glied außer a die Differenz noch 8 mal enthalte. Hieraus wird man abnehmen können, daß das zwölfte Glied außer a die Differenz noch 11 mal enthalten wird, oder daß es $a+11d$ seyn werde, und daß man ganz allgemein jedes Glied der Reihe durch $a+(n-1)d$ wird angeben können, wenn a das erste Glied, d die Differenz und n die Anzahl Glieder bezeichnet, weil jederzeit dem $n$ten Gliede $n-1$ Glieder vorangehen müssen. Diesen für das $n$te Glied gefundenen Ausdruck nennt man das **allgemeine Glied** der Progression, (terminus generalis) weil es für jedes Glied paßt, sobald man die Buchstaben a, d u. n gehörig durch Zahlen ausdrückt. Wäre $a=3$, $d=4$ und $n=12$ gegeben, so würde $a+(n-1)d=3+11.4=47$ gefunden werden, wovon man sich leicht überzeugen kann, wenn man die Progression formirt.

§. 48.

Setzt man das allgemeine Glied der Progression $= V$, so giebt $V = a + (n - 1)d$ eine Gleichung, in welcher man nach und nach jedes Glied als unbekannt annehmen, und die Gleichung nach den vorhergehenden Gründen auflösen kann. Auf diese Weise erhält man

$$a = V - (n-1)d;\ d = \frac{V-a}{n-1} \text{ und } n = \frac{V-a}{d} + 1.$$

Diese Formeln dienen dazu, sobald von den vier Größen, als a oder erstes Glied, d oder Differenz, n oder Anzahl Glieder und V oder letztes Glied eins fehlt, es durch ihre Hülfe sogleich zu finden. Denn wäre von einer Progression $a = 5$, $d = 2$ und $n = 375$ gegeben, so setze man $V = a + (n - 1)d = 5 + 374 \cdot 2 = 753$.

Wäre $V = 753$, $n = 375$ und $d = 2$ gegeben, so ist $a = V - (n - 1)d = 753 - 374 \cdot 2 = 753 - 748 = 5$.

Wäre wieder V, a und n wie oben gegeben, so ist $d = \frac{V-a}{n-1} = \frac{753-5}{375-1} = \frac{748}{374} = 2$.

Und wenn V, a und d wie oben angenommen worden, so ist $n = \frac{V-a}{d} + 1 = \frac{753-5}{2} + 1 = \frac{748}{2} + 1 = 374 + 1 = 375$.

§. 49.

Wenn man eine Progression geradezu, und unter diese die nemliche Progression, umgekehrt schreibt,

und sodann die übereinander stehenden Glieder addirt, so erhält man in der untern Reihe lauter gleiche Glieder, von denen ein jedes so groß ist, als die Summe des ersten und letzten Glieder.

$$\begin{array}{ccccccc} a, & a+d, & a+2d, & a+3d, \text{-----} & a+(n-2)d, & a+(n-1)d \\ a+(n-1)d, & a+(n-2)d, & a+(n-3)d, \text{---} & & a+d, & a \\ \hline 2a+(n-1)d, & 2a+(n-1)d \text{ ꝛc.} & \text{---} & 2a+(n-1)d, & 2a+(n-1)d. \end{array}$$

Dieses Glied $2a+(n-1)d$ trifft man in der untern Reihe so oft an, als Glieder in der Progression vorhanden sind. Wenn man daher die untere Reihe addirt, so erhält man $(2a+(n-1)d)n$. Weil nun in der Summe der untern Reihe die Summen beider Progressionen enthalten sind, so wird man die Summe einer Progression finden, wenn man von der vorigen gefundenen Summe der untern Reihe die Hälfte nimmt. Setzt man daher die Summe aller Glieder einer Reihe $= S$, so findet man den allgemeinen Ausdruck $\frac{(2a+(n-1)d)n}{2} = S$. Man findet also die Summe der Glieder einer Progression, wenn man zum letzten Gliede das erste addirt, dazu noch $(n-1)$ mal die Differenz addirt, diese Summe mit n multiplicirt, und endlich von diesem Produkte die Hälfte nimmt. Setzt man das letzte Glied $= V$, so ist $\frac{(V+a)n}{2} = \frac{(2a+(n-1)d)n}{2} = S$ und diesen für S gefundenen allgemeinen Ausdruck nennt man das S u m m a t o r i s c h e G l i e d der Progression, (terminus summatorius) weil man dadurch von jeder Reihe sogleich die Summe der Glieder bestimmen kann, wenn man in die Stelle der Buchstaben die bestimmten Zahlen setzt.

Wäre demnach wie im vorigen §. $a = 5$, $d = 2$, $n = 375$ und $V = 753$, so setzt man entweder

$$S = \frac{(V+a)n}{2} = \frac{(753+5)\,375}{2} = \frac{758 \times 375}{2}$$

$$= 379 \times 375 = 142125 \text{ oder } S = \frac{(2a+(n-1)d)n}{2}$$

$$= \frac{(10 + 374.2)\,375}{2} = \frac{758 \times 375}{2} = 142125.$$

§. 50.

1) Wenn man eine Plantage anlegt, so werden die Bäume am vortheilhaftesten so gestellt, daß die Bäume in der zweiten Reihe jederzeit mitten auf die Zwischenräume in der ersten Reihe stehen, weil man durch diese Einrichtung auf einen Platz die mehrsten Bäume setzen kann, und weil sie alsdenn alle gleich weit von einander entfernt stehen können.

Wäre nun der zu bepflanzende Raum so beschaffen, daß in der ersten Reihe 8 Bäume, in jeder folgenden 1 Baum mehr stehen könnte, und daß man 36 Reihen setzen könnte, wie viel Bäume würden dann in der letzten Reihe gesetzt werden können?

Bei genauer Betrachtung der Aufgabe findet man, daß a, d, n gegeben sind, und daß man V sucht, und man kann sich hier der oben gefundenen Formel $V = a + (n-1)\,d$ mit Vortheil bedienen. Hiernach wird $V = 8 + 35.1 = 43$ gefunden.

2) Es hat jemand einen Brunnen graben lassen, und dabei den Accord gemacht, daß er für jede einen Fuß tiefere Schachtruthe 4 gr. mehr als für die vorhergehende bezahlen will, nun hat er die achtundfunfzigste

Schachtruthe mit 9 thl. 16 gr. bezahlen müssen, wieviel hat er für die erste gezahlt?

In dieser Aufgabe sind V, n und d gegeben, und a wird gesucht, und man findet a nach der obigen Formel, wenn man setzt $a = V - (n - 1) d = 9$ thl. 16 gr. — 57 × 4 gr. = 9 thl. 16 gr. — 9 thl. 12 gr. = 4 gr.

3 Es verkauft jemand eine Baumschule welche 500 junge Bäume enthielt, unter der Bedingung, daß er den ersten Baum mit 1 gr., jeden folgenden um 6 pf. theurer bezahlt erhält, nun hat er für den letzten 5 thl. 5 gr. 9 pf. erhalten, wieviel hat er für jeden folgenden mehr erhalten?

Diese Aufgabe giebt wieder eine arithmetische Progression deren erstes Glied $a = 1$ gr, V = 5 thl. 5 gr. 9 pf. und $n = 500$ gegeben und d gesucht wird, und man findet d, wenn man setzt $d = \frac{V - a}{n - 1} = \frac{5\text{ rl. } 5\text{ gr. } 9\text{ pf.} - 1\text{ gr}}{500 - 1}$

$= \frac{1497}{499} = 3$ pf.

4) Es hat jemand einen Graben ausgraben zu lassen unter den Accord übernommen, daß er für jede Ruthe Länge, wenn der Graben 9 Fuß breit und 6 Fuß tief wird, 16 gr., für jeden Fuß aber, welchen er tiefer wird, 4 gr. mehr bezahlt erhalte. Nun ist der Graben des Terrains wegen nicht aller Orten gleich tief, und man weiß, daß die Ruthe da, wo der Graben am tiefsten war, mit 1 rtl. 12 gr. bezahlt worden ist; wie tief war an diesem Orte der Graben?

Da der bei zunehmender Tiefe verhältnißmäßig größern Breite bei dem Accord nicht gedacht, sondern dieser Accord bloß nach der Tiefe gemacht worden ist, so

zeigt sich hier wieder eine Progression, in welcher a das für die bedungene Tiefe gezahlte Geld, nemlich 16 gr., $V =$ dem für die tiefere Ruthe gezahlten Gelde, nemlich 1 rtl. 12 gr., und d der Differenz in den Zahlungen gleich sey, oder 4 gr., und daß es nur darauf ankomme, zu wissen, wie viel Glieder in der Progression vorhanden sind. Man bediene sich daher der Formel $n = \frac{V - a}{d} + 1$, so erhält man $n = \frac{\text{1 rtl. 12 gr.} - \text{16 gr}}{\text{4 gr.}} + 1 = \frac{\text{20 gr.}}{\text{4 gr.}} + 1 = 5 + 1 = 6$. Da nun der Graben laut Accord 6 Fuß tief seyn sollte, und er nun noch um 6 Fuß tiefer geworden ist, so muß er hier $6 + 6 = 12$ Fuß tief gewesen seyn.

5) Würde ferner gefragt wie viel Zeit man gebrauche, um einen Graben 1500 Ruthen lang wenigstens 8 Fuß breit auszugraben, von dem nach dem Niveau 800 Ruthen $= a$, 5 Fuß, 300 Ruthen $= b$ 6 Fuß, 140 Ruthen $= c$, $7\frac{1}{4}$ Fuß, 160 Ruthen $= d$, $8\frac{3}{4}$ Fuß und 100 Ruthen $= e$, $9\frac{1}{2}$ Fuß tief ausgegraben werden muß, wenn man weiß, daß Ein Arbeiter in 24 Stunden $= f$, und wenn er täglich 12 Stunden $= m$ arbeitet in $\frac{24}{12} = \frac{f}{m}$ Tage, bei 5 Fuß Tiefe 1 Ruthe lang ausgraben kann, bei jeden $\frac{1}{4}$ Fuß zunehmender Tiefe aber 2 Stunden $= g$ mehr gebrauche, wenn diese Arbeit durch 200 $= n$ Tagelöhner verrichtet werden soll?

Um diese Aufgabe aufzulösen bestimme man zuerst, wieviel Zeit 1 Mann gebrauche, um 1 Ruthe lang bei den verschieden angegebenen Tiefen auszugraben. Man sieht hier leicht, daß 24 Stunden $= f$ als 1tes Glied, 2 Stunden $= g$ die Differenz, und die Menge von $\frac{1}{4}$

Fuß, welche der Graben an Tiefe zunimmt zu den ersten Gliede hinzugesetzt die Anzahl Glieder einer arithmetischen Progression bestimmen, von welcher das *n*te Glied gesucht werden muß. So würde man bei $6 = 5 + \frac{4}{4}$ Fuß Tiefe, das 5te Glied, bei $7\frac{1}{4} = 5 + \frac{9}{4}$ das 10te Glied, bei $8\frac{3}{4} = 5 + \frac{15}{4}$ Fuß das 16te Glied, und bei $9\frac{1}{2} = 5 + \frac{18}{4}$ Fuß Tiefe, das 19te Glied zu bestimmen haben.

Wenn man nach dem vorangehenden diese *n*ten Glieder bestimmt, so findet man, daß 1 Mann um 1 Ruthe lang auszugraben bei 5 Fuß Tiefe f, bei 6 Fuß Tiefe $f + 4g$, bei $7\frac{1}{4}$ Fuß Tiefe $f + 9g$, bei $8\frac{3}{4}$ Fuß Tiefe $f + 15g$ und bei $9\frac{1}{2}$ Fuß Tiefe $f + 18g$ Stunden gebrauchen würde.

Berechnet man nunmehr wieviel Tage die n Menschen zu einer jeden der für jede Tiefe bestimmten Länge nöthig, und setzt diese gefundenen Werthe zusammengenommen $= x$, so findet man $\frac{af}{mn} + \frac{(f + 4g)b}{mn} +$

$$\frac{(f + 9g)c}{mn} + \frac{(f + 15g)d}{mn} + \frac{(f + 18g)e}{mn} = x$$

woraus sich

$$\frac{af + bf + 4bg + cf + 9cg + df + 15dg + ef + 18eg}{mn} = x$$

oder $\frac{(a + b + c + d + e)f + (4b + 9c + 15d + 18e)g}{mn}$

$= x$ ergiebt.

Setzt

Setzt man in dieser Formel statt der Buchstaben die oben angenommenen Werthe, so findet man $\frac{(a+b+c+d+e)f}{mn} = \frac{1500 \times 24}{12 \times 200} = 15$ und $\frac{(4b+9c+15d+18e)g}{mn} = \frac{(1200+1260+2400+1800)2}{12.200}$ $= \frac{6660 \times 2}{2400} = \frac{666}{120} = 5\frac{11}{20}$, mithin ist $x = 15 + 5\frac{11}{20} = 20\frac{11}{20}$ Tage, welches man für 21 Tage annehmen kann.

Nimmt man nun an, daß jeder Arbeiter täglich 8 gr. Tagelohn erhält, so würde man täglich $\frac{200}{3} = 66\frac{2}{3}$ thl. mithin in 21 Tagen 1400 thl. an Tagelohn gebrauchen.

Dies Beispiel soll jedoch blos den Weg anzeigen, den man bei einer Aufgabe dieser Art einschlagen kann, und müssen die hier willkührlich angenommenen Data jedesmal nach den obwaltenden Umständen angesetzt werden.

6) Es setzt jemand eine Nummer auf einen bestimmten Ruf in der Zahlen-Lotterie, in der Art, daß er das erstemal 4 gr. und jedes folgendemal 4 gr. mehr setzt. Nach der 30sten Ziehung gewinnt seine Nummer, man will, wissen ob er in allem noch gewonnen, und wieviel er gewonnen oder verlohren habe?

Um diese Aufgabe aufzulösen, muß man zuerst den 30sten Einsatz berechnet, diesen mit 70 multipliciren, weil auf den bestimmten Ruf der Einsatz 70mal gewonnen wird, hieraus muß man die Summe von allem gesetzten Gelde berechnen, und diese Summe sodann

von dem gewonnenen Gelde subtrahiren, so ergiebt sich der Gewinnst, welchen man durch x ausdrücken kann.

Da er das erstemal 4 gr. $= a$, das folgendemal 4 gr. mehr $= d$, und in allen 30mal $= n$ gesetzt hat, so findet man $V = 4$ gr. $+ 29 . 4$ gr. $= 30 \times 4$ gr. $= 5$ thl. mithin ist $5 \times 70 = 350$ thl. der Gewinn, und $\frac{(V + e) n}{2} = S = \frac{5 \text{ thl. } 4 \text{ gr.} \times 30}{2} = 77$ thl. 12 gr. der Verlust, mithin $x = 350$ thl. $- 77\frac{1}{2}$ thl. $=$ 272 thrl. 12 gr.

§. 51.

Wenn man in einer Progression immer ein Glied ums andere herauswirft, so erhält man eine neue Progression, deren Differenz doppelt so groß ist, als die Differenz der ersten. So erhält man aus $\div a, a + d, a + 2d, a + 3d, a + 4d, a + 5d, a + 6d, a + 7d, a + 8d$ rc. die neue Progression $\div a, a + 2d, a + 4d, a + 6d, a + 8d$ rc. deren Differenz $2d$ doppelt so groß als die der ersten Reihe ist. Daß übrigens diese gefundene Reihe eine wirkliche Progression ist, sieht man sogleich an ihrer Form, welche genau mit der allgemeinen übereinstimmt.

Hieraus folgt, daß man umgekehrt auch zwischen jede zwei aufeinander folgenden Glieder einer Reihe wieder ein mittleres Glied einschalten kann, und daß man sodann eine Progression erhalten muß, deren Differenz halb so groß als in der vorigen Reihe seyn muß.

Diese mittlern Glieder wird man jedesmal erhalten, wenn man die zwei folgenden Glieder addirt, und deren Summe halbirt. So erhält man aus der vorigen Reihe, die neue Reihe

$$\div a, a + \tfrac{1}{2}d, a + d, a + \tfrac{3}{2}d, a + 2d, a + \tfrac{5}{2}d, a + 3d, a + \tfrac{7}{2}d \text{ rc.}$$

§ 52.

Von den geometrischen Verhältnissen, Proportionen und Progressionen.

Wenn man bei zweien gleichartigen Größen untersucht, um wievielmal die eine Größe größer oder kleiner sey, als die andere ist, so bestimmt man hierdurch ihr geometrisches Verhältniß (Arithm. §. 151).

Diese Vergleichung geschieht, wenn man untersucht, wie die eine Größe aus der andern entsteht, und dies kann geschehen, einmal, wenn man die eine Größe selbst gewissemal nimmt, ein andermal, wenn man einen bestimmten Theil von ihr gewissemal nimmt. Hieraus folgt, daß man jederzeit die eine Größe entweder mit irgend einer ganzen oder gebrochenen Zahl multipliciren muß, damit man die andern erhalte. Nimmt man hierbei an, daß jederzeit das erste Glied aus dem zweiten entstehen soll, so wird man diese Zahl erhalten, wenn man das erste Glied durch das zweite dividirt, will man aber das zweite Glied aus dem ersten entstehen lassen, so muß man das zweite Glied durch das erste dividiren. Diese Zahl nennt man allgemein den Exponenten des Verhältnisses, und drückt das Verhältniß dadurch aus, daß man das Zeichen der Division zwischen beide Größen setzt. Es wird also jederzeit durch $a : ma$ allgemein ein geometrisches Verhältniß angegeben, von dem m den Exponenten angiebt, welchen man erhält, wenn man das zweite Glied durch das erste dividirt, und es wird m entweder eine ganze Zahl seyn, wenn das erste Glied selbst ein genau messender Theil vom zweiten ist, oder ein Bruch, wenn das zweite Glied nur aus Theilen vom erstern genau entstehen kann.

§. 53.

Wenn in zweien Verhältnissen die vordern Glieder aus den hintern, oder die hintern Gliedern aus den vordern, auf gleiche Art entstehen, oder welches einerlei ist, wenn sie gleiche Exponenten haben, so sind die Verhältnisse einander gleich. Daher allgemein $a : ma$ und $b : mb$ gleiche Verhältnisse, hingegen $a : ma$ und $b : nb$ ungleiche Verhältnisse darstellen. Wenn man nun zwei gleiche Verhältnisse durchs Zeichen der Gleichheit mit einander verbindet, so erhält man eine Proportion.

Diese Proportionen sind, der Verschiedenheit ihrer Glieder nach, entweder abgesonderte, wenn alle vier Glieder verschiedener Größe sind, oder stätige, wenn die mittlern Glieder einander gleich sind; und man wird durch $a : ma = b : mb$ allgemein jede abgesonderte Proportion, und durch $a : ma = ma : m^2 a$ oder $\div a, ma, m^2 a$ allgemein jede stätige Proportion ausdrücken können.

§. 54.

Von einer jeden Proportion ist das Produkt der äußern Glieder dem Produkte der mittlern gleich, daher ist in der abgesonderten Proportion $a:b = c:d$, $ad = bc$, und in der stätigen $a:b = b:c$ oder $\div a, b, c$, $ac = bb = b^2$. Nimmt man in diesen Gleichungen $ad = bc$ und $ac = b^2$ nach und nach jeden Buchstaben als unbekannt an, so findet man bei der Auflösung $d = \frac{bc}{a}$, $a = \frac{bc}{d}$, $b = \frac{ad}{c}$ und $c = \frac{ad}{b}$ nach welchen Formeln jedes fehlende Glied einer abgesonderten Proportion leicht bestimmt werden kann. Fehlt nemlich ein äußeres Glied, so dividirt man das Produkt der

mittlern durch das bekannte äußere, und wenn das fehlende ein mittleres ist, so dividirt man das Produkt der äußern durch das bekannte mittlere Glied.

Eben so erhält man aus der Gleichung $ac = b^2$ die Formeln $c = \frac{b^2}{a}$, $a = \frac{b^2}{c}$ und $b = \sqrt{ac}$ nach welchen man jedes fehlende Glied einer stätigen Proportion leicht bestimmen kann. Denn fehlt hier ein äußeres Glied, so dividirt man das Quadrat des mittlern Gliedes durch das bekannte äußere, und wenn das mittlere fehlt, so nimmt man von den Produkte der äußern Glieder die Quadratwurzel.

Da man sich nun hier jede zwei beliebige Zahlen, als die äußern Glieder einer stätigen Proportion denken kann, so findet man allgemein die geometrische mittlere Proportionalzahl, wenn man von dem Produkte der beiden gegebenen Zahlen die Quadratwurzel nimmt.

§. 55.

Der allgemeine Ausdruck der stätigen Proportion $\div a, ma, m^2 a$ zeigt, daß diese Proportion eigentlich nur drei Glieder hat, wenn man blos auf die Verschiedenheit der Glieder sieht; zugleich aber sieht man auch daraus, daß die ganze Proportion bekannt ist, wenn man das erste Glied a und den Exponenten m kennt, denn multiplicirt man mit dem Exponenten das erste Glied, so erhält man das zweite, und wenn man dies wieder mit dem Exponenten multiplicirt, so erhält man das dritte Glied.

§. 56.

So gut man nun aus dem ersten Gliede a und dem Exponenten m die drei Glieder der stätigen Proportion

bestimmt, eben so gut kann man auch fortfahren, das dritte Glied, und überhaupt jedes zuletzt gefundene Glied noch einmal mit dem Exponenten zu multipliciren, und man wird auf diesem Wege, eine ganze Reihe von auf einander folgenden stätigen Proportionalgliedern erhalten, welche man allgemein durch ∺ a, am, am^2, am^3, am^4, am^5 ꝛc. ausdrücken kann, und welche man geometrische Progressionen nennt.

Ist in diesen Progressionen m eine ganze Zahl, oder ein unächter Bruch, so wird jedes folgende Glied größer, als das vorangehende, und die Progression heißt eine zunehmende Progression; ist hingegen m ein ächter Bruch, so wird sie eine abnehmende Progression genannt, weil hier jedes folgende Glied kleiner, als das vorangehende wird. So ist z. E. ∺ 1, 3, 9, 27, 81, 243 ꝛc. oder ∺ 3, 5, $8\frac{1}{3}$, $13\frac{8}{9}$, $23\frac{4}{27}$, $38\frac{47}{81}$ ꝛc. eine zunehmende Progression von denen 3, eine ganze Zahl der Exponent der erstern, und $\frac{5}{3}$ ein unächter Bruch der Exponent der letztern ist. Hingegen ist ∺ 243, 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ ꝛc. eine abnehmende Progression, und deren Exponent $\frac{1}{3}$ ist ein ächter Bruch.

§. 57.

Betrachtet man das Verfahren bei Formirung einer Progression genau, so findet man, daß die ganze Progression bekannt seyn müsse, wenn man nur zwei auf einander folgende Glieder derselben kennt. Denn sobald diese gegeben sind, und man dividirt das folgende Glied durch das vorangehende, so erhält man den Exponenten, mit welchem man nur jedesmal das zuletzt gefundene Glied multipliciren darf, um das folgende Glied zu finden. Und wenn man durch eben diesen Exponenten das erste Glied dividirt, so erhält man ein vorangehendes, welches man immer wieder durch den

Exponenten dividiren, und so immer noch ein vorangehendes Glied bestimmen kann. Setzt man nun dieser Operation keine Grenzen, so sieht man leicht ein, daß man auf diesem Wege eine Progression nicht nur aus den beiden gegebenen Gliedern bestimmen, sondern auch auf beiden Seiten bis ins Unendliche fortsetzen könne.

Wären demnach 1536 und 3072, als einander folgende Glieder einer Progression gegeben, so ist $\frac{3072}{1536} = 2$ der Exponent, und man erhält $3072 \times 2 = 6144$, $6144 \times 2 = 12288$, $12288 \times 2 = 24576$ 2c. als die folgenden, und $\frac{1536}{2} = 1536 \times \frac{1}{2} = 768$, $768 \times \frac{1}{2} = 384$, $384 \times \frac{1}{2} = 192$, $192 \times \frac{1}{2} = 96$ 2c. als vorangehende Glieder einer Progression, welche man auf beiden Seiten nach Belieben erweitern kann.

§. 58.

Betrachtet man die gefundenen Reihen ∺ 1536, 3072, 6144, 12288, 23576, 49152 2c. und ∺ 3072, 1536, 768, 384, 192, 96, 48, 24 2c. mit einiger Aufmerksamkeit, so findet man, daß die abnehmende Reihe eine Fortsetzung der zunehmenden auf der entgegengesetzten Seite sey, und man wird sich leicht überzeugen, daß dies jederzeit der Fall seyn müsse, wenn eine zunehmende Reihe mit einer abnehmenden zwei gleiche aufeinander folgende Glieder hat, als hier 1536 und 3072. Hieraus wird man folgern können, daß man nur die Eigenschaften der zunehmenden Reihe untersuchen dürfe, um aus diesen zugleich auch die Eigenschaften der abnehmenden mit zu erhalten.

§. 59.

Wenn $\div$ A, B, C, D, E, F, G, H, eine geometrische Progression ist, und man setzt zwischen jede zwei auf einander folgende Glieder ein mittleres Proportional-Glied, so erhält man eine neue Progression. Nun findet man diese mittlern Glieder nach §. 54 $= \sqrt{AB}, \sqrt{BC}, \sqrt{CD}, \sqrt{DE}$, ꝛc. und die neue Progression wird seyn $\div$ A, $\sqrt{AB}$, B, $\sqrt{BC}$, C, $\sqrt{CD}$, D, $\sqrt{DE}$, E, ꝛc. setzt man in der oben angenommenen Reihe den Exponenten $= e$, so drückt sich die Reihe aus durch $\div$ A, Ae, Ae^2, Ae^3, Ae^4, ꝛc. und die mittlere Proportional zwischen dem ersten und zweiten Gliede wird seyn $\sqrt{AAe} = \sqrt{A^2 e} = A\sqrt{e}$, woraus sich ergiebt, daß der Exponent der neuen Reihe, die Quadratwurzel von dem Exponenten der vorigen Reihe seyn müsse.

Läßt man aber von einer Progression immer ein Glied ums andere weg, so erhält man wieder eine neue Progression, deren Exponent das Quadrat von dem Exponenten der gegebenen Reihe seyn muß. So giebt $\div$ A, Ae, Ae^2, Ae^3, Ae^4, Ae^5, Ae^6, Ae^7, Ae^8, ꝛc. die neue Reihe $\div$ A, Ae^2, Ae^4, Ae^6, Ae^8, Ae^{10}, ꝛc. deren Exponent $= e^2$ ist.

§. 60.

Setzt man das erste Glied einer Progression $= 1$, den Exponenten $= e$, so erhält man die Reihe $\div$ 1, e, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6, e^7, ꝛc. Da nun alle Glieder dieser Progression stätigte Proportional-Glieder sind, so muß zwischen jeden zwei unmittelbar auf einander folgenden Gliedern einerlei Verhältniß statt finden, und dies gemeinschaftliche Verhältniß ist $1 : e$. Man kann sich daher vorstellen, daß die ganze Reihe entstehe,

wenn man dieses Verhältniß 1 : e öfter zusammensetzt. So erhält man

$1 : e = 1 \quad : e$ das zweite Glied,

$1 : e = e \quad : e^2$ das dritte Glied,

$1 : e = e^2 : e^3$ das vierte Glied,

$1 : e = e^3 : e^4$ das fünfte Glied rc.

Diese Entstehungsart kann man sich bei jeder Progression denken, und sodann nennt man das Verhältniß 1 : e aus dessen Zusammensetzung die ganze Reihe entstanden ist, das Grundverhältniß der Progression. Bemerkt man bei diesem Verfahren die Zahlen, welche anzeigen, wie oft man das Grundverhältniß zusammensetzen muß, um ein Glied der Reihe hervorzubringen, so nennt man diese: den Logarithmus des Verhältnisses vom ersten Gliede zu diesem Gliede. So würde z. E. um das Glied e^5 zu erhalten, das Verhältniß 1 : e fünfmal zusammengesetzt werden müssen, und man würde sagen: 5 sey der Logarithmus von dem Verhältnisse 1 : e^5. Eine geometrische Progression mit ihren zustimmenden Logarithmen nennt man: ein logarithmisches System.

§. 61.

Da man sich unter eine Zahl jederzeit die Entstehung derselben aus der Einheit, oder welches einerlei ist, das Verhältniß der Einheit zu dieser Zahl, denket, so ist es bequem, die Progression, von der man die Logarithmen bestimmen will, mit 1 anzufangen, weil sodann der Logarithmus des Verhältnisses 1 : e^5 mit dem Logarithmus der Zahl e^5 gleich bedeutende Benennungen sind. Aus dieser Ursache hat das Grundverhält-

niß eines jeden logarithmischen Systems zum ersten Gliede 1.

§. 62.

Setzt man die Glieder der geometrischen Progression in eine Reihe neben einander, und die zustimmenden Logarithmen darunter, als

$$\div\div\; 1,\ e,\ e^2,\ e^3,\ e^4,\ e^5,\ e^6,\ e^7,\ e^8,\ e^9, \text{ꝛc.}$$
$$1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9. \text{ꝛc.}$$

so zeigt sich, daß die Logarithmen in der natürlichen Zahlen-Reihe auf einander folgen müssen. Weil nun jedes folgende Glied der geometrischen Progression entsteht, indem man das Grundverhältniß einmal öfter zusammensetzt, so muß man auch den Logarithmen dieses Gliedes erhalten, wenn man den Logarithmen des vorhergefundenen Gliedes um 1 vermehrt; oder weil die natürliche Zahlen-Reihe eine arithmetische Progression ist, indem man auch zu dieser arithmetischen Progression das folgende Glied bestimmt.

§. 63.

Dividirt man alle Glieder der geometrischen Progression mit ihrem Exponenten e, so erhält man folgende Progression, als:

$$\div\div\; \frac{1}{e}, \frac{e}{e}, \frac{e^2}{e}, \frac{e^3}{e}, \frac{e^4}{e}, \frac{e^5}{e}, \frac{e^6}{e}, \frac{e^7}{e}, \frac{e^8}{e} \text{ ꝛc.}$$

oder $\frac{1}{e}, 1, e, e^2, e^3, e^4, e^5, e^6, e^7, e^8$ ꝛc.

setzt man unter dieser die Zahlen . . 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

so passen diese nicht mehr als Logarithmen zu der obern Reihe, sondern man findet, daß jede Zahl um 1 größer

ist, als der Logarithmus der über ihr stehenden Zahl. Sollen aber die Zahlen wieder als Logarithmen zu den darüber stehenden Gliedern passen, so muß man eine jede um 1 vermindern. Hieraus ergiebt sich, daß, wenn man ein jedes Glied der geometrischen Reihe durch ihren Exponenten dividirt, zugleich auch von jedem darunter stehenden Logarithmus 1 oder die Differenz der Reihe subtrahirt, man jederzeit wieder zwei Progressionen erhalten werde, von denen jedes Glied der arithmetischen zu dem darüber stehenden der geometrischen Reihe immer als Logarithmus zustimmen werde.

Durch Wiederholung dieser Operation erhält man nach und nach folgende Reihen mit ihren zustimmenden Logarithmen, als:

$$\div\div \frac{1}{e},\ 1,\ e,\ e^2,\ e^3,\ e^4,\ e^5,\ e^6,\ e^7,\ e^8 \text{ rc.}$$
$$0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8 \text{ rc.}$$

$$\div\div \frac{1}{e^2},\ \frac{1}{e},\ 1,\ e,\ e^2,\ e^3,\ e^4,\ e^5,\ e^6,\ e^7 \text{ rc.}$$
$$-1.\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7$$

$$\div\div \frac{1}{e^3},\ \frac{1}{e^2},\ \frac{1}{e},\ 1,\ e,\ e^2,\ e^3,\ e^4,\ e^5,\ e^6 \text{ rc.}$$
$$-3.\ -2.\ -1.\ 0.\ 1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.$$

Betrachtet man diese neuen Reihen mit ihren Logarithmen genau, so findet man, daß der Logarithmus der Einheit 0 seyn müsse, und daß die Logarithmen aller der Einheit vorangehenden Glieder negativ werden; und zwar findet man, daß alle diese Glieder zum Zähler die Einheit, und zum Nenner irgend eine der ganzen Zahlen haben, welche in der Reihe vorkommt, zugleich aber bemerkt man auch, daß ihre Logarithmen mit dem Zeichen — eben die sind, welche zu ihrem Nenner mit

dem Zeichen + gehören. Aus dieser Bemerkung folgt, daß ein negativer Logarithmus jederzeit zu einem Bruche gehöre, dessen Zähler 1, der Nenner aber diejenige ganze Zahl ist, zu welcher der Logarithmus positiv gehört.

§. 64.

Aus dem Vorhergehenden haben wir gesehen, daß alle ganze Zahlen einen positiven Logarithmus haben, und daß die negativen Logarithmen zu Brüchen gehören, deren Zähler 1 ist; es kann also niemals eine Zahl als Logarithmus zu einer negativen Zahl gehören, oder welches einerlei ist, der Logarithmus characterisirt diese positive und negative Eigenschaft der Größen nicht. Wenn man daher mit Logarithmen rechnet, so muß man die Größen während der Rechnung sämmtlich als positiv annehmen, und aus den Bedingungen sodann bestimmen, ob die zuletzt gefundene Zahl positiv oder negativ seyn müsse.

§. 65.

Wenn man von den Gliedern der Progression immer ein Glied um das andere mit seinem zustimmenden Logarithmus herauswirft, so werden (nach §. 59 und §. 51.) beide Reihen noch Progressionen seyn, und es wird auch jede der unterstehenden Zahlen noch Logarithmus der darüber stehenden bleiben, so lange man nicht das ganze Logarithmen-System ändert, oder so lange man $1 = \log e$ beibehält. Hieraus wird man umgekehrt auch schliessen dürfen, daß, wenn man zwischen jede zwei folgende Glieder der geometrischen Reihe eine mittlere geometrische, und zwischen den zustimmenden Logarithmen eine mittlere arithmetische Proportionalzahl sucht, beide neuen Reihen noch als logarithmisches System zusammenpassen werden, oder daß die neu ge-

fundenen Glieder der arithmetischen Reihe die Logarithmen der zustimmenden neuen Glieder der geometrischen seyn müssen. Hieraus folgt, daß jederzeit $\log \sqrt{1 \cdot e} = \frac{0+1}{2}$, $\log \sqrt{e \cdot e^2} = \frac{1+2}{2}$, $\log \sqrt{e^2 \cdot e^3} = \frac{2+3}{2}$, $\log \sqrt{e^3 \cdot e^4} = \frac{3+4}{2}$ rc. gefunden werden müsse.

Nimmt man aus der geometrischen Reihe vier Glieder, von denen immer zwei und zwei gleich weit von einander in der Reihe entfernt liegen, oder welche eine Proportion geben, so müssen ihre Logarithmen ebenfalls eine arithmetische Proportion geben, weil auch von ihnen immer zwei und zwei in der arithmetischen Reihe gleich weit von einander entfernt liegen. So geben z. E. $1 : e^2 = e^3 : e^5$ eine geometrische Proportion, und die zustimmende Logarithmen, als $0 - 2 = 3 - 5$ eine arithmetische.

§. 66.

Da man in der oben angegebenen Progression e nach Belieben verändern kann, so kann es auch eben so viele logarithmische Systeme geben, und es muß daher auch eine und dieselbe Zahl bald diese bald jene Zahl zum Logarithmen haben, je nachdem man die Zahl aus diesem oder jenem Logarithmen-System nimmt. Eben so muß auch ein und derselbe Logarithmus in jedem System zu einer andern Zahl gehören.

Das von dem ersten Erfinder dem Baron Nepper berechnete System hatte zum Grundverhältnisse $1 : 2$, mithin war $e = 2$ angenommen, und die Reihe mit ihren zustimmenden Logarithmen war

∺ 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048 2c,
0, 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11.

Soll dieses logarithmische System in der Mathematik oder im gemeinem Leben einigen Nutzen haben, so ist es nicht hinreichend, die Glieder der Progression zu kennen, sondern man muß auch die Logarithmen der zwischen ihnen fehlenden Glieder der natürlichen Zahlenreihe kennen, und diese kann man auf folgende Art finden. Man nimmt zwischen den beiden Gliedern der Reihe, zwischen denen die gesuchte am nächsten liegt, die geometrisch mittlere Proportional-Zahl, und von ihren beiden Logarithmen die arithmetisch mittlere, so ist die zuletzt gefundene Zahl (§. 65.) der Logarithmus der erst gefundenen. Ist diese Zahl nun nicht gleich die verlangte, sondern etwan kleiner, so muß die gesuchte am nächsten zwischen dieser und der größern der beiden erstern liegen, und man sucht zwischen diesen beiden und ihren Logarithmen wie zuvor, die mittlern Proportional-Zahlen, so stimmt wieder die eine als Logarithmus zu der andern. Ist nun auch diese Zahl nicht die verlangte, sondern etwa größer, so liegt die gesuchte Zahl am nächsten zwischen dieser und der zuvor gefundenen, und man verfährt mit diesen beiden und mit ihren Logarithmen wie zuvor gezeigt worden. Setzt man die Operation fort, und nimmt immer zwischen der nächst größern und nächst kleinern Zahl die mittlere geometrische Proportional-Zahl, und zwischen ihren Logarithmen die arithmetische, so erhält man immer zu dem neu gefundenen Gliede den Logarithmus, und man wird sich dem Werthe der gesuchten Zahl so sehr nähern, daß man die gefundene Zahl mit einem ganz geringen Fehler für die gesuchte annehmen kann, sodann ist die zuletzt gefundene arithmetisch mittlere Proportional-Zahl der Logarithmus der gesuchten Zahl.

§. 67.

Um dieses deutlicher zu machen, wollen wir von dem oben angegebenen System den Logarithmus der Zahl 3 suchen, und um die Operation deutlicher übersehn zu können, die gefundenen Zahlen in Form einer Tabelle untereinander setzen.

Die Zahl 3 liegt zwischen 2 und 4, mithin muß auch log 3 zwischen 1 und 2 liegen, setzt man nun $2 = A$ und $4 = B$, so ist

$$\log A = \log 2 = 1$$

$$\log B = \log 4 = 2$$

$$\log C = \log \sqrt{AB} = \log 2{,}82842712474619 = \frac{1+2}{2} = 1{,}5.$$

$$\log D = \log \sqrt{BC} = \log 3{,}37841804648044 = \frac{2+1{,}5}{2} = 1{,}75.$$

$$\log E = \log \sqrt{DC} = \log 3{,}09121484879282 = \frac{1{,}75+1{,}5}{2} = 1{,}625$$

$$\log F = \log \sqrt{EC} = \log 2{,}95690139110923 = \frac{1{,}625+1{,}5}{2} = 1{,}5625$$

$$\log G = \log \sqrt{EF} = \log 3{,}02331235346481 = \frac{1{,}625+1{,}5625}{2} = 1{,}59375.$$

$$\log H = \log \sqrt{FG} = \log 2{,}98992249125588 = \frac{1{,}5625+1{,}59375}{2} = 1{,}578125$$

$$\log I = \log \sqrt{HG} = \log 3{,}00657107095701 = \frac{1{,}578125+1{,}59375}{2} = 1{,}5859375$$

$$\log K = \log \sqrt{HI} = \log 2{,}99823522536568 = \frac{1{,}5859375+1{,}578125}{2} = 1{,}58203125$$

$$\log L = \log \sqrt{IK} = \log 3{,}00240040509401 = \frac{1{,}58203125 + 1{,}5859375}{2} = 1{,}583984375$$

$$\log M = \log \sqrt{KL} = \log 3{,}00031691256857 = \frac{1{,}583984375 + 1{,}58203125}{2} = 1{,}5830078125$$

$$\log N = \log \sqrt{MK} = \log 2{,}99927588336309 = \frac{1{,}5830078125 + 1{,}58203125}{2} = 1{,}58251953125$$

$$\log O = \log \sqrt{MN} = \log 2{,}99980635325709 = \frac{1{,}58251953125 + 1{,}5830078125}{2} = 1{,}582763671875$$

$$\log P = \log \sqrt{OM} = \log 3{,}00005995541886 = \frac{1{,}582763671875 + 1{,}5830078125}{2} = 1{,}5828857421875$$

$$\log Q = \log \sqrt{PO} = \log 2{,}99993315165816 = \frac{1{,}5828857421875 + 1{,}5287636 71875}{2} = 1{,}58282470703125$$

$$\log R = \log \sqrt{PQ} = \log 2{,}99996552701 86 = \frac{1{,}58282470703125 + 1{,}5828857421875}{2} = 1{,}582855224609375$$

$$\log S = \log \sqrt{PR} = \log 3{,}00002823722634 = \frac{1{,}5828857421875 + 1{,}582855224609375}{2} = 1{,}5828704833984375.$$

§. 68.

Wollte man die Logarithmen nur auf vier zehntheilige Stellen brauchen, so könnte man entweder Logarithmus R oder Logarithmus S für den Logarithmus 3 annehmen, weil diese beide in diesen vier höchsten zehntheiligen Stellen nicht von einander abweichen, und die zu ihnen gehörigen Zahlen der 3 sehr nahe kommen; will man aber die Logarithmen auf sieben zehntheilige Stellen genau haben, so muß man mit dieser Operation so lange fortfahren, bis man auf Zahlen kömmt, deren Logarithmen in der siebenten zehntheiligen Stelle nicht mehr von einander abweichen, und dann kann man eine dieser zustimmenden Zahlen für die verlangte annehmen.

Hat man erst die Logarithmen einiger Zahlen berechnet, so kann man auf einem bequemern Wege die Logarithmen der Zahlen finden, welche durch die Multiplication dieser Zahlen entstehen. Es ist nemlich (nach §. 65) $1 : e^2 = e^3 : e^5$ und $l1 - le^2 = le^3 - le^5$ oder $0 - 2 = 3 - 5$, mithin ist $le^5 = le^3 + le^2$. Sollte nun log 6 bestimmt werden, so ist $6 = 2 \times 3$, mithin ist $1 : 2 = 3 : 6$ und $l1 - l2 = l3 - l6$, daher $\log 6 = \log 3 + \log 2$. Hieraus folgt, daß man auf dem mühsamen Wege die Logarithmen aller Primzahlen berechnen muß, weil diese keine andere Factoren als sich selbst und die Einheit haben.

Man hat zwar noch einen analytischen Weg erfunden, um die Logarithmen zu berechnen, da aber theils dieser nicht hinreichend aus dem Vorangehenden erläutert werden kann, theils auch die Berechnung der Logarithmen nicht sowohl als die Anwendung der schon berechneten, der Hauptgegenstand unserer Aufmerksamkeit ist, so wird das angeführte Beispiel hinreichend seyn,

um meine Leser zu überzeugen, wie sehr wir den würdigen Männern verpflichtet sind, welche es über sich genommen, auf einem so mühevollen Wege zu unsern Nutzen zu arbeiten, denn die ersten Logarithmen-Tafeln sind auf diesem beschriebenen Wege berechnet worden, weil die analytische Berechnung erst späterhin erfunden worden ist.

§. 69.

Der Nutzen der Logarithmen liegt in der §. 65 angeführten Bemerkung, daß jederzeit die Glieder der geometrischen Reihe, wenn immer zwei und zwei von ihnen in der Reihe gleich weit von einander entfernt liegen, eine geometrische, und ihre zustimmenden Logarithmen eine arithmetische Proportion geben. Denn soll man die Größe A mit B multipliciren, so muß (nach §. 13) jederzeit $1 : B = A : AB$, mithin (nach §. 65) auch $l1 - lB = lA - lAB$ seyn, woraus sich (nach §. 43) $lAB = lA + lB - l1 = lA + lB$ ergiebt, weil $l1 = 0$ ist. Wenn nun zwei Zahlen in einander multiplicirt werden sollen, so kann man durch die Logarithmen die Multiplication in eine Addition verwandeln. Man sucht nemlich die Logarithmen beider Factoren, addirt sie, schlägt sodann in der Tabelle nach, zu welcher Zahl die gefundene Summe als Logarithmus gehört, so giebt diese Zahl das Produkt an. Sollte z. E. nach dem §. 66 angegebenen Systeme 128 mit 16 multiplicirt werden, so ist $1 : 16 = 128 :$ Produkt, mithin auch $l1 - l16 = l128 - lP$ oder $0 - 4 = 7 - 11$, mithin ist 11 der Logarithmus des Produkts; das Produkt selbst aber ist 2048, weil 11 nach der Tabelle zu 2048 gehört.

Auf gleiche Art kann man durch die Logarithmen die Division in eine Subtraction verwandeln. Denn

soll A durch B dividirt werden, so ist (nach §. 21) $B:1 = A:Q$, mithin $lB - l1 = lA - lQ$, und weil wieder $l1 = 0$ ist, so wird allgemein lQ oder $l\frac{A}{B} = lA - lB$ seyn. Soll daher eine Zahl durch eine andere dividirt werden, so sucht man die Logarithmen der gegebenen Zahlen, subtrahirt den des Divisors von dem des Dividendum, und sucht in der Tabelle nach, zu welcher Zahl diese Differenz als Logarithmus gehört, so giebt diese den Quotienten an.

§. 70.

Noch größer ist der Nutzen, den die Logarithmen bei Formirung der Potenzen oder Ausziehung der Wurzeln gewähren; denn soll von einer Größe A irgend eine Potenz gebildet werden, so ist

$$1:A = A:A^2, \text{ mithin } lA^2 = lA + lA = 2lA$$
$$1:A = A^2:A^3, \text{ mithin } lA^3 = lA + 2lA = 3lA$$
$$1:A = A_3:A^4, \text{ und } lA^4 = lA + 3lA = 4lA$$

und $1:A = A^{n-1}:A^n$ mithin $lA^n = lA + (n-1)lA = nlA$.

Soll nun eine Größe oder Zahl auf irgend eine Dignität erhoben werden, so sucht man in der Tabelle den Logarithmus der Wurzel und multiplicirt diesen mit dem Exponenten der verlangten Potenz, so erhält man den Logarithmus der Potenz, und die Tabelle zeigt uns sodann die Potenz selbst an.

Setzt man in der Gleichung $lA^n = nlA$, lA^n und n als bekannt voraus, so ergiebt sich durch die Auflösung der Gleichung $\frac{lA^n}{n} = lA$, woraus folgt, daß

$\log \sqrt[n]{A} = \frac{\log A}{n}$ sey, und daß man durch eine einfache Division den Logarithmus einer Wurzel, mithin die Wurzel selbst bestimmen könne. Sollte man z. E. von einer Zahl die 12te Wurzel angeben, so nimmt man den Logarithmus dieser Zahl, dividirt denselben durch den Wurzel-Exponenten 12, und schlägt nach, wozu dieser Quotient als Logarithmus gehört, so giebt diese Zahl die Wurzel an, welche verlangt worden.

§. 71.

Diese hier angeführten Eigenschaften der Logarithmen stimmen für alle Systeme, und sind daher ganz allgemein. Lange nach Erfindung der Logarithmen wurde zu Oxforth durch einen Professor Nahmens Brigge ein anderes logarithmisches System berechnet, welches seiner vorzüglichen Bequemlichkeit wegen dem andern vorgezogen, allgemein eingeführt, und nach seinem Erfinder, das Briggische System genannt wurde. In diesem Systeme ist das Grundverhältniß 1 : 10 angenommen, und die Progression mit ihren Logarithmen ist

$$\ldots \frac{1}{10000}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10}, 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000$$
$$-4, \quad -3, \quad -2, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5.$$

Siehet man auf die Zahlen, welche zwischen den hier in der Progression angegebenen Gliedern fehlen, so sieht man, daß zwischen 1 und 10 alle Zahlen der Einer fehlen, und man wird (nach §. 65) schließen, daß alle Logarithmen der Einer zwischen 0 und 1 fallen müssen, woraus sich ergiebt, daß die Logarithmen der Einer die Form 0, *abcdef* 2c. haben müssen wo durch *abcd* 2c. ein zehntheiliger Bruch angegeben wird. Eben so zeigt sich, daß zwischen 10 und 100 alle Zah-

len der Zehner von 11 bis 99 fehlen, und daß also auch deren Logarithmen zwischen 1 und 2 liegen, und die Form 1, *abcdef* ꝛc. haben müssen. Setzt man diese Betrachtung fort, so findet man, daß

0, *abcdef* ꝛc. die Form der Logarithmen der Einer
1, *abcdef* ꝛc. die Form der Logarithmen der Zehner
2, *abcdef* ꝛc. die Form der Logarithmen der Hunderte
3, *abcdef* ꝛc. die Form der Logarithmen der Tausende ꝛc.
seyn müssen.

Was die Logarithmen der Brüche betrifft, so findet in diesem Systeme gleichfalls statt, daß die Logarithmen aller Brüche, deren Zähler 1 und deren Nenner irgend eine ganze Zahl ist, dem Logarithmen der Nenner gleich sind, und das Zeichen — haben, so daß also auch dieses System geradezu keinen Logarithmus eines andern Bruches angiebt, als welcher die vorgenannte Form hat.

Bei genauer Betrachtung dieser angegeben Logarithmen siehet man bald, daß man es leicht an dem Logarithmus, oder vielmehr an seiner Form sehen kann, ob die dazu gehörige Zahl eine Zahl der Einer, der Zehner, der Hunderte ꝛc. sey, und daß man dies aus der dem zehntheiligen Bruche vorangehenden ganzen Zahl beurtheilen könne, deswegen nennt man auch diese ganze Zahl: die Characteristic des Logarithmen. So zeigt z. E. die Charactiristic 3 in 3, *abcdef* ꝛc. an, daß der Logarithmus zu einer Zahl der Tausende gehört, oder daß die höchste Ziffer in der Stelle der Tausende stehen müsse, nun folgen aber der Stelle der Tausende noch drei ganze Stellen, mithin zeigt der Logarithmus, daß auf die höchste Stelle noch drei ganze Stellen folgen müssen, oder daß überhaupt die Zahl mit vier ganzen Ziffern müsse vorgestellt seyn. Eben

dies findet man bei den Logarithmen der Zehner, denn die Zehner werden durch zwei ganze Ziffern vorgestellt, und die Charactiristic oder Kennziffer ist 1.

Aus dieser Betrachtung folgt, daß man beim Aufsuchen der Logarithmen nur auf den zehntheiligen Bruch zu sehen hat, und daß man sodann die Kennziffer nach dem Werthe der Zahl sogleich bestimmen kann. Wüßte man z. E. daß der zehntheilige Bruch des Logarithmus von 37596 durch $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ rc. angegeben sey, so würden wir schließen, da die Zahl durch fünf ganze Ziffern vorgestellt ist, so muß die Characteristic 4 und mithin Logarithmus 37596 = 4, $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ rc. seyn.

Wüßten wir im Gegentheil, daß bei 6, $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ rc. der zehntheilige Bruch zu der Zahl 37596 gehörte, so würden wir aus der Characteristic 6 schließen, daß die Zahl müsse mit sieben ganzen Ziffern geschrieben werden, und daß also 6, $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ rc. = log 3759600 seyn müsse.

§. 72.

Außer dem Eigenthümlichen, aus der Form des Logarithmus den Werth der höchsten Ziffer, oder wenigstens die Classe der Einheiten angeben zu können, zu der sie gehört, hat dieses System noch die Eigenheit, daß alle Zahlen, welche mit einerlei bezeichnenden Ziffern in gleicher Folge geschrieben werden, auch einerlei zehntheiligen Bruch in ihrem Logarithmus haben, so daß diese nur durch die Kennziffer, ihren verschiedenen Werthen nach, von einander abweichen.

Um sich hiervon zu überzeugen, nehme man den Logarithmus der Zahl 7491, welcher = 3,8745398 gefunden wird, wollte man nun den log 7491000 haben, so schließe man: 7491000 = 7491 × 1000;

mithin ist $l\ 7491000 = l\ 7491 + \log 1000$ also log $7491000 = 3,8745398 + 3 = 6,8745398$.

Eben so ist $\log 74,91 = \log \frac{7491}{100} = \log 7491 - \log 100$ oder $\log 74,91 = 3,8745398 - 2 = 1,8745398$.

Auf gleiche Art ist auch $\log 7,491 = \log \frac{7491}{1000} = l\ 7491 - \log 1000$ also $\log 7,491 = 3,87453983 - 3 = 0,8745398$.

Aus diesem Beispiele sieht man, daß jede Veränderung welche wir mit der Zahl vorgenommen, blos eine Veränderung mit der Kennziffer hervorbrachte, den zehntheiligen Bruch aber ungeändert ließ. Hieraus wird man folgern können, daß, wenn man auch mit Verkleinerung der Zahl fortfährt, so daß man einen zehntheiligen Bruch erhält, man auch dann den Bruch des Logarithmen kann ungeändert lassen, und daß auch dies nur eine Veränderung der Kennziffer bewirken müsse. Sollte nun $\log 0,7491$ verlangt werden, so setze man $\log 0,7491 = \log \frac{7491}{10000} = \log 7491 - \log 10000 = 3,8745398 - 4$, läßt man nun hier den Bruch des Logarithmus ungeändert, und subtrahirt die 4 blos von der Kennziffer, so ist $3 - 4 = -1$ und $\log 0,7491 = -1,8745398$. Auf gleiche Art ist $\log 0,07491 = \log \frac{7491}{100000} = 3,8745398 - 5 = -2,8745398$. Und eben so findet man auch $\log 0,007491 = \log \frac{7491}{1000000} = 3,8745398 - 6 = -3\ 8745398$

$$\log 0,0007491 = \log \frac{7491}{10000000} = 3,8745398 - 7$$
$$= -4,8745398.$$

Alle diese hier angegebenen Logarithmen haben einen positiven und einen negativen Theil. Es ist nemlich von dem Logarithmus der Zahl 7491 sowohl die Kennziffer, als auch der zehntheilige Bruch positiv, da wir nun blos erstere änderten, leztere aber ganz ungeändert ließen, so kann sich auch das Zeichen — nur einzig auf die Kennziffer erstrecken, der Bruch aber muß positiv bleiben.

§. 73.

Da alle die Schlüsse von vorigem §. bei jedem zehntheiligen Bruche gemacht werden können, so wird allgemein folgen, daß der Logarithmus eines zehntheiligen Bruches jederzeit eine negative Kennziffer, hingegen einen positiven Bruch haben müsse. Betrachtet man nun die Kennziffern dieser Logarithmen genauer, so findet man auch hier, daß sie die Classe der höchsten Ziffer characterisiren; so ist nemlich die Characteristic — 1, wenn die höchste Ziffer in der ersten zehntheiligen Stelle steht, und — 1 bezeichnet die Stelle der Zehntheile. Eben so findet man, daß — 2 die zweite zehntheilige Stelle, oder die Hunderttheile, — 3 die dritte zehntheilige Stelle, oder die Stelle der Tausendtheile, — 4 die vierte zehntheilige Stelle, oder die Zehntausendtheile rc. bezeichnet.

Es wird also keine Schwierigkeit haben, den Logarithmus einer zehntheiligen Zahl anzugeben, denn sollte log 0,003794 gesucht werden, so suche man aus der Tabelle den zu diesen bedeutenden Ziffern stimmenden Bruch, und setze vor denselben die Kennziffer, nach

obiger Beſtimmung. So findet man in der Tabelle log 3794 = 3,5790973, mithin muß log 0,003794 = — 3,5790973 ſeyn, weil die höchſte Ziffer in der dritten zehntheiligen Stelle ſtehet.

Sollte umgekehrt zu einem Logarithmus einer zehntheiligen Zahl, die Zahl beſtimmt werden, ſo ſucht man aus der Tabelle die zu dem zehntheiligen Bruche des Logarithmus ſtimmenden bedeutenden Ziffern, und giebt ihnen den Werth, wie es die negative Kennziffer erfordert. Wäre demnach zu — 2,5907304 die zuſtimmende Zahl zu beſtimmen, ſo findet man in der Tabelle 3,5907304 = log 3897 mithin muß — 2,5907304 = log 0,03897 ſeyn, weil Characteriſtic — 2 die zweite zehntheilige Stelle für die höchſte bedeutende Ziffer der Zahl angiebt.

§. 74.

Nach den Grundſätzen der Arithmetik bezeichnet der Bruch einen Quotienten, welcher entſteht, wenn man den Zähler durch den Nenner dividirt, es wird alſo auch der Logarithmus eines Bruches eben ſo gefunden, wie der des Quotienten $\frac{A}{B}$ (nach §. 69) nemlich, wenn man von dem Logarithmus des Zählers den Logarithmus des Nenners ſubtrahirt.

Wäre demnach log $\frac{15}{8}$ zu beſtimmen, ſo findet man log $\frac{15}{8}$ = log 15 — log 8 = 1,1760913 — 0,9030900 = 0,2730013 wozu nach der Tabelle die Zahl 1,875 gehört, wodurch ſogleich der Bruch $\frac{15}{8}$ in den zehntheiligen 1,875 verwandelt worden.

Wäre log $\frac{5}{7}$ zu beſtimmen, und zugleich der Bruch in einen zehntheiligen zu verwandeln, ſo nehme man wieder log $\frac{5}{7}$ = log 5 — log 7 = 0,6989700 — 0,8450980. Da hier der Logarithmus des Diviſors größer als der

Logarithmus des Dividendum ist, mithin ersterer von letzteren nicht subtrahirt werden kann, so muß man umgekehrt den Logarithmus des Dividendum von dem des Divisor subtrahiren, wodurch aber der erhaltene Logarithmus ganz negativ wird, und daher seiner Form nach nicht zu einem zehntheiligen Bruche, sondern zu einem Bruche gehört, dessen Zähler 1, der Nenner aber diejenige ganze Zahl ist, zu welcher der Logarithmus positiv gehört. So ist $\log \frac{5}{7} = \log 5 - \log 7 = 0,6989700 - 0,8450980 = -0,1461280$ ganz negativ.

Um aber den Logarithmus sogleich in der Form, als einen zehntheiligen zu erhalten, bedenke man, daß eine Zahl nicht in ihrem Werthe geändert wird, wenn man 1 addirt, und zugleich auch 1 subtrahirt, weil $+1-1=0$ ist. Setzt man nun log 5 mit $-1+1$ zusammen, so ist $-1+1+0,6989700 = -1+1,6989700$, und nun kann man die Subtraction so verrichten, wie es erfordert wird, alsdenn erhält man $\log \frac{5}{7} = -1 + 1,6989700 - 0,8450980$ oder $\log \frac{5}{7} = -1 + 0,8538720 = -1,8538720$ worin blos die Characteristic negativ ist. Zu diesem Logarithmus gehört nach der Tabelle die Zahl 0,7142, mithin ist $\frac{5}{7} = 0,7142$.

Hat man durch Rechnung einen ganz negativen Logarithmus erhalten, und man will diesem die Form eines zehntheiligen Logarithmen geben, oder die zustimmende Zahl durch eine zehntheilige Zahl ausgedrückt angeben, so verbindet man ihn ebenfalls mit $-1+1$ z. E. es wäre durch Rechnung der Logarithmus $-2,5798432$ ganz negativ gefunden, so zerlege man ihn in die beiden Theile $-2 - 0,5798432$, verbinde sodann den Theil -2 mit -1, und den zehntheiligen Bruch mit $+1$, so erhält man $-2-1+1-0,5798432 = -2-1+0,4201568 = -3,4201568$ worin

bloß die Characteristic negativ ist, und zu dem nach der Tabelle 0,00263 gehört.

Um beim Gebrauch der Logarithmen nicht Unrichtigkeiten zu begehen, muß man jederzeit genau Acht geben, ob durch die Rechnung der ganze Logarithmus negativ wird oder nicht, und im erstern Falle die gezeigte Abänderung nie unterlassen, denn, sollte man aus Versehn einen ganz negativen Logarithmus, als einen zehntheiligen behandeln, so würden nothwendig in der Rechnung Unrichtigkeiten vorfallen müssen.

Diesem Irrthume vorzubeugen, schlagen einige Mathematiker vor, bei den Logarithmen der zehntheiligen Brüche die Mantisse oder den zehntheiligen Bruch des Logarithmen voran, die negative Characteristic aber hinten zu schreiben. Hiernach würde man also statt — 3,4201568 0,4201568 — 3 schreiben, welcher Schreibart man sich jederzeit bedienen kann, wenn man nicht mit lauter Logarithmen zehntheiliger Zahlen zu thun hat.

§. 75.

In den gewöhnlichen Tabellen sind die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 10000 berechnet, da aber bei Berechnungen häufig Fälle eintreten, wo es erfordert wird, von Zahlen, welche größer als 10000 sind die Logarithmen, und umgekehrt zu Logarithmen, welche eine größere Characteristic als 3 haben, die Zahlen zu bestimmen, so bleibt noch zu zeigen, wie man sich in diesen Fällen zu verhalten habe. Dies leidet jedoch die Einschränkung, daß die Zahl nicht mit mehr Ziffern geschrieben sein darf, als der zehntheilige Bruch des Logarithmen zehntheilige Stellen hat, es sey denn, daß die letztere Ziffern blos Nullen wären, welche den zehntheiligen Bruch nicht ändern. Denn betrachtet man §. 67 den für $l\,3$ angenommenen $l\,S$, so findet man, daß die Zahl auf eben so viel zehntheilige Stellen mit der Zahl 3 genau übereinstimmt, als zehntheilige Stel-

len in dem Logarithmus genau angegeben sind. Da nun in den gewöhnlichen Tabellen die Logarithmen nur auf sieben zehntheilige Stellen berechnet sind, so darf die Zahl nicht mit mehr als sieben Ziffern geschrieben werden, und eben so die Kennziffer der Logarithmen nicht größer als 6 seyn, weil sonst die letztern Ziffern nicht genau angegeben werden können.

Bei großen Zahlen sind die Differenzen der Zahlen mit den Differenzen ihrer zustimmenden Logarithmen proportional, und wird dieser Satz um so richtiger, je größer die Zahlen angenommen werden. Betrachtet man die Logarithmen folgender, auf einander folgenden Zahlen, als

$$l\,A = l\,9888 = 3{,}9951085$$
$$l\,B = l\,9889 = 3{,}9951524$$
$$l\,C = l\,9890 = 3{,}9951963$$
$$l\,D = l\,9891 = 3{,}9952402$$
$$l\,E = l\,9892 = 3{,}9952841,$$

so findet man, daß zwischen jede zwei folgende Logarithmen einerlei Differenz 439, so wie zwischen ihre zustimmende Zahlen einerlei Differenz 1 statt findet. Hieraus folgt, daß so wie die Differenz des Logarithmen der ersten und dritten Zahl doppelt so groß ist, als die Differenz zwischen den Logarithmen der ersten und zweiten Zahl, eben so auch die Differenz zwischen der ersten und dritten Zahl doppelt so groß, als die Differenz der ersten und zweiten Zahl seyn müsse, oder daß allgemein $C - A : B - A = l\,C - l\,A : l\,B - l\,A$ sich verhalten müsse. Dies findet bei großen Zahlen jederzeit statt, und giebt uns ein Mittel an die Hand, der oben geschehenen Forderung Genüge zu leisten.

§. 76.

Sollte zu der Zahl 576984 der Logarithmus gesucht werden, so schneidet man vier ganze Stellen

von vorne ab, und sucht sodann in der Tabelle die nächst größere und nächst kleinere Zahl mit ihren Logarithmen, als

$$\log A = \log 5769 = 3{,}7611005$$
$$\log B = \log 5769{,}84$$
$$\log C = \log 5770 = 3{,}7611758.$$

Hierauf setzt man $C - A : B - A = lC - lA : lB - lA$ oder

$$1 : 0{,}84 = 753$$
$$\begin{array}{r} 0{,}84 \\ \hline 3012 \\ 6024 \\ \hline 632{,}52 \end{array} = CB - lA$$

addirt man nun die gefundene Differenz 632 zu den drei niedrigsten Ziffern des kleinern Logarithmen, also zu l A, so erhält man

$$\begin{array}{r} 3{,}7611005 \\ 632 \\ \hline 3{,}7611637 \end{array}$$

$= \log 5769{,}84$ mithin muß $\log 576984 = 5{,}7611637$ seyn, weil die Zahl mit sieben Ziffern geschrieben wird.

Auf gleiche Art wird verfahren, um log 9875695000 zu bestimmen. Man setzt nemlich

$$\log A = \log 9875 = 3{,}9945371$$
$$\log B = \log 9875{,}695$$
$$\log C = \log 9876 = 3{,}9945881$$

Nun schließe man wieder $C - A : B - A = lC - lA : lB - lA$ oder

$$
\begin{array}{r}
1 : 0{,}695 = 510 : \\
510 \\
\hline
3475 \\
\hline
354{,}450
\end{array}
$$

$= l\,B - l\,A$, es ist also

$$
\begin{array}{r}
3{,}9945371 \\
354 \\
\hline
3{,}9945725
\end{array}
$$

$= \log 9875{,}695$, und $\log 9875695000 = 9{,}9945725$.

Eben so würde man auch verfahren um log 0,7934584 zu bestimmen. Man betrachtet nemlich die gegebene Zahl, als wäre sie 7934,584 und setzt

$$\log A = \log 7934 = 3{,}8994922$$
$$\log B = \log 7934{,}584$$
$$\log C = \log 7935 = 3{,}8995469$$

$$C - A : B - A = \log C - \log A : \log B - \log A$$

$$
\begin{array}{r}
1 : 0{,}584 = 547 : \\
547 \\
\hline
4088 \\
2336 \\
2920 \\
\hline
319{,}448 \\
3{,}8994922 \\
\hline
3{,}8995241
\end{array}
$$

$= \log 7934{,}584$ und nach §. 73 $\log 0{,}7934584 = -1{,}8995241$.

§. 77.

Soll umgekehrt zu einem gegebenen Logarithmen, welcher nicht in der Tabelle steht, und dessen Kennziffer nicht über 6 ist, die zustimmende Zahl gesucht werden, so gebe man dem Logarithmus die Characteristic 3, und suche darauf in der Tabelle den nächst kleinern und nächst größern Logarithmus, mit ihren zustimmenden Zahlen, und schließe nach §. 75 die Differenzen der Logarithmen verhalten sich gegen einander, wie die Differenzen der Zahlen, wodurch man die Differenz der kleinern und der gesuchten Zahl, mithin die Zahl selbst erhält, deren Werth man darauf nach der Characteristic bestimmt

Wäre zu 5,9187594 die Zahl zu suchen, so setzt man

$$3{,}9187117 = \log 8293 = \log A$$
$$3{,}9187594 = \qquad\qquad \log B$$
$$3{,}9187640 = \log 8294 = \log C$$

mithin ist $\log C - \log A : \log B - \log A = C - A : B - A$

$$523 \;:\; 477 = 1$$

$$523)\,477{,}00\,|\,0{,}91 = B - A,$$
$$4707$$
$$\overline{730}$$

daher $3{,}9187594 = \log 8293{,}91$ und

$$5{,}9187594 = \log 829391$$

Eben so verfährt man, wenn zu log 1,9843275 die Zahl zu bestimmen ist. Man setzt nemlich

$$3{,}9843022 = \log 9645 = \log A$$
$$3{,}9843275 = \qquad\qquad \log B$$
$$3{,}9843473 = \log 9646 = \log C$$

daher log C — log A : log B — log A = C — A : B — A

451 ; 253 = 1

451) 25300 | 0,56 = B — A, mithin
2255
2750

3,9843275 = log 9645,56 u. 1,9843275 = log 96,4556

§. 78.

Es sey ferner der Bruch $\frac{789}{8948}$ durch Logarithmen in einen zehntheiligen Bruch auf 6 zehntheilige Stellen zu verwandeln. Man setze log $\frac{789}{8948}$ = log 789 — log 8948 mithin

log 789 = 2,8970770
log 8948 = 3,9267539
— 2,9703231

= log $\frac{789}{8948}$ in welchem bloß die Kennziffer negativ ist.

Um diesen Logarithmus zu erhalten, subtrahire man den zehntheiligen Bruch vom Logarithmus des Nenners von dem des Zählers; wenn dieser nicht zureicht, wie hier der Fall ist, so borge man bei der Characteristic. Ist dies geschehen, so hat man dadurch einen positiven zehntheiligen Bruch zum Rest erhalten, und nun subtrahire man die Kennziffer des Zählers von der des Nenners, so erhält man durch dies umgekehrte Verfahren eine negative ganze Zahl, welche zu dem zuvor gefundenen positiven zehntheiligen Bruch, als Charac-

Characteristic gehört, und der auf diese Art gefundene Logarithmus gehört zu einem zehntheiligen Bruch.

Um nun die zustimmende Zahl anzugeben, verfährt man nach vorigen §. indem man setzt.

$$3,9703004 = \log 9339 = \log A$$
$$3,9703231 = \qquad \log B$$
$$3,9703469 = \log 9340 = \log C$$

$\log C - \log A : \log B - \log A = C - A : B - A$ also

$$465 : 227 = 1 :$$

$$465 \,|\, 22700 \,|\, 0,48 = B - A$$ daher ist

1860
4100
3720

$3,9703231 = \log 9339,48$ und $-2,9703231 = \log 0,0933948 = \log 0,093395$.

Wäre es nicht ausdrücklich verlangt oder nothwendig, den zehntheiligen Bruch auf sechs zehntheilige Stellen zu berechnen, und man begnügte sich, ihn nur auf drei Stellen anzugeben, wie dies in den gewöhnlichen Rechnungen gemeiniglich der Fall ist, so hätte man den log A für den log B annehmen, und die zustimmende Zahl nach der Kennziffer umändern können. Hierdurch erhält man sodann 0,09339 für die gesuchte Zahl, welche von der vorigen nur in der letztern zehntheiligen Stelle abweicht.

§. 79.

Soll die 25ste Dignität von dem Bruche $\frac{105}{100}$ angegeben werden, so ist (nach §. 70) $\log \left(\frac{105}{100}\right)^{25} = 25 \log \left(\frac{105}{100}\right) = 25 (\log 105 - \log 100)$.

Man sucht daher den log 105, subtrahirt davon log 100, multiplicirt die Differenz mit dem Exponenten 25, so erhält man den Logarithmus der Potenz, zu welchem man nach vorigen §§. die zustimmende Zahl sucht.

$$\begin{array}{rr} \text{Diesemnach ist} & \log 105 = 2{,}0211893 \\ & \log 100 = 2{,}0000000 \\ \hline \log 105 - & \log 100 = 0{,}0211893 \\ & 25 \\ \hline & 1059465 \\ & 423786 \\ \hline & 0{,}5297325 \end{array}$$

$= \log \left(\frac{105}{100}\right)^{25}$ rechnet man nun nur auf 3 zehntheilige Stellen, so giebt die Tabelle 0,5297325 = log 3,386 an, daher ist also $\left(\frac{105}{100}\right)^{25} = 3{,}386$.

§. 80.

Soll von 759384 die 30ste Wurzel oder $\sqrt[30]{759384}$ bestimmt werden, so setzt man: weil (nach §. 70) $\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}$ so muß auch $\log \sqrt[30]{759384} = \frac{\log 759384}{30}$ seyn.

Man bestimme daher zuförderst nach §. 76 den log 759384

log A = log 7593 = 3,8804134
log B = log 7593,84
log C = log 7594 = 3,8804706 und

C — A : B — A = log C — log A : log B — log A oder

$$\begin{array}{r} 1 : 0{,}84 = 572 \\ 0{,}84 \\ \hline 2288 \\ 4576 \\ \hline 480{,}48 \\ 3{,}8804134 \\ \hline \end{array}$$

3,8804614 = log 7593,84 und
5,8804614 = log 759384.

Diesen gefundenen Logarithmus dividire man durch 30, so ist $\frac{5{,}8804614}{30} = 0{,}1960154 =$ log, 570 u. $1{,}570 = \sqrt[30]{759384}$ wie verlangt worden.

Anwendungen der Logarithmen auf die geometrische Progressionen, und die davon abgeleiteten Rechnungsarten für das Forstfach.

§. 81.

Nach §. 56 wird durch $\div\!\div$ $a, ae, ae^2, ae^3, ae^4, ae^5$, rc. wenn e der Exponent der Reihe ist, eine jede geometrische Progression ganz allgemein dargestellt. Betrachtet man nun in dieser Reihe die Glieder mit Aufmerksamkeit, so zeigt sich, daß in jedem Gliede der Exponent e auf eine bestimmte Potenz als Factor vorkommt. So ist $a = a\,e^0$ im ersten Gliede $a\,e^5$ im sechsten und $a\,e^3$ im vierten Gliede.

Bei genauerer Betrachtung wird man gewahr, daß der Exponent von e, jederzeit um 1 kleiner sey, als die Zahl, welche die Anzahl Glieder bis inclusive dieses Glied angiebt, oder der Exponent von e zeigt, wie viel Glieder in der Reihe dem Gliede vorangehen. Hieraus kann man schließen: weil dem 14ten Gliede noch 13 Glieder vorangehen, so muß das 14te Glied ae^{13} seyn; und weil dem $n$ten Gliede noch $n - 1$ Glieder vorangehen, so muß das $n$te Glied allgemein durch ae^{n-1} angegeben werden.

Drückt man das $n$te Glied durch V aus, so giebt $ae^{n-1} = V$ eine Formel, durch deren Hülfe man ganz allgemein jedes Glied einer Progression bestimmen kann, weil man für n in der Formel eine jede ganze Zahl setzen kann, sobald der Exponent und das erste Glied der Reihe bekannt sind. Aus diesem Grunde nennt man diese Formel auch: das allgemeine Glied (Terminus generalis) der geometrischen Progression.

Bedient man sich zur Bestimmung dieses Gliedes der Logarithmen, so ist $l V = \log a + (n - 1) \log e$.

§. 82.

Nimmt man in den Gleichungen $V = ae^{n-1}$ und $\log V = \log a + (n - 1) \log e$ nach und nach jedes Glied als unbekannt, die andern drei Glieder aber immer als bekannt an, so ergiebt sich durch Auflösung der Gleichungen

$V = ae^{n-1}$ und $\log V = \log a + (n - 1) \log e$

$a = \frac{V}{e^{n-1}}$ und $\log a = \log V - (n - 1) \log e$

$e = \sqrt[n-1]{V}$ und $\log e = \frac{\log V - \log a}{n - 1}$ und endlich $n = \frac{\log V - \log a}{\log e} + 1$

Durch Hülfe dieser Formeln kann von den vieren bei einer Progression vorkommenden Stücken, ein jedes einzelnes bestimmt werden, wenn die andern drei bekannt sind; und ein leichter Ueberblick ist hinreichend, um den Nutzen nicht zu verkennen, welchen uns bei dieser Bestimmung die Logarithmen gewähren müssen, da ohne sie einige Stücke nur sehr mühsam, andere aber gar nicht aufgefunden werden können.

§. 83.

Setzt man die Summe aller Glieder einer geometrischen Progression $= S$, so ist $S = a + ae + ae^2 + ae^3 +$ ꝛc. - - - - $+ ae^{n-1}$ und wenn man die Gleichung mit dem Exponenten e multiplicirt, so ist $eS = ae + ae^2 + ae^3 + ae^4 +$ ꝛc. - - - - - - $ae^{n-1} + ae^n$ subtrahirt man nun die obere Gleichung von der untern, so heben sich alle Glieder gegen einander auf, und es bleibt nur von der untern das Glied ae^n, von der obern aber das Glied a übrig, mithin ist von ae^n noch a zu subtrahiren, und es muß $ae^n - a = eS - S = (e-1)S$ seyn, woraus sich $S = \frac{ae^n - a}{e - 1}$ ergiebt.

Weil durch diese Formel von einer Progression die Summe aller Glieder bestimmt werden kann, sobald man ihre Anzahl, das erste Glied und den Exponenten kennt, so nennt man dieselbe: das summatorische Glied, (Terminus summatorius.)

§. 84.

Um mit Berechnung der §. 82 und 83 gefundenen Formeln näher bekannt zu werden, wollen wir annehmen, es sollte das letzte Glied einer Progression bestimmt werden, deren erstes Glied $a = 200$, der

Exponent $e = \frac{105}{100}$ und von der die Anzahl Glieder $n = 50$ gegeben ist.

Um diese Aufgabe aufzulösen, nehme man die Gleichung $lV = \log a + (n-1)\log e$, bestimme 1, $\log e$, 2, multiplicire denselben mit $n-1$, 3, addire dazu $\log a$, so erhält man log V, zu welchem man 4. die nach der Tabelle zustimmende Zahl sucht, und so V selbst findet.

Diesem nach ist

$$\begin{array}{r} \log 105 = 2{,}0211893 \\ \log 100 = 2{,}0000000 \\ \hline \log 105 - \log 100 = \log e = 0{,}0211893 \\ 49 = n-1 \\ \hline 1907037 \\ 847572 \\ \hline (n-1)\log e = 1{,}0382757 \\ \log 200 = \log a = 2{,}3010300 \\ \hline 3{,}3393057 = \log V. \end{array}$$

Zu 3,3393057 suche man die zustimmende Zahl, und wenn man hierbei noch auf die erstern 3 zehntheiligen Stellen Rücksicht nimmt, so setzt man

$$\begin{array}{l} 3{,}3392526 = \log 2184 = \log A \\ 3{,}3393057 = \log B \\ 3{,}3394514 = \log 2185 = \log C, \end{array}$$

und

$$lC - lA : lB - lA = C - A : B - A$$

$$1988 : 531 = 1 : \frac{531}{1988} = 0{,}267$$

daher $3{,}3393057 = \log 2184{,}267$ und $V = 2184{,}267$.

§. 85.

Wäre von einer Progression $V = 2184{,}267$, der Exponent $e = \frac{105}{100}$ und die Anzahl Glieder $n = 50$

gegeben, man sollte das erste Glied a der Reihe bestimmen, so nehme man (von §. 82) die Formel $\log a = \log V - (n-1) \log e$, bestimme wieder erstens, $\log e$, zweitens, multiplicire denselben mit $n-1$, drittens, suche den log V und subtrahire davon das No. 2 gefundene Produkt, so erhält man den $\log a$, und mithin nach der Tabelle a selbst.

$$\begin{array}{rl} \text{Nun ist } \log 105 = & 2{,}0211893 \\ \log 100 = & 2{,}0000000 \\ \hline \log e = & 0{,}0211893 \\ & 49 = n-1 \\ \hline (n-1) \log e = & 1{,}0382757 \\ \log 2184{,}267 = \log V = & 3{,}3393057 \\ \hline \log a = & 2{,}3010300, \end{array}$$

wozu man in der Tabelle die Zahl 200 für a findet.

§. 86.

Wenn von einer Progression das letzte Glied $V = 384{,}48$, die Anzahl Glieder $n = 25$, und das erste Glied $a = 150$ gegeben sind, und es soll der Exponent e bestimmt werden, so ist (nach §. 82) $\log e = \frac{\log V - \log a}{n-1}$.

Man sucht daher erstens, log V und $\log a$, zweitens, subtrahirt von log V den $\log a$, drittens, dividirt diese Differenz durch $n-1$, so erhält man $\log e$, und die Tabelle giebt e in einen zehntheiligen Bruch an.

Bestimmt man nach bekannten Gründen log 384,48, so ist

$$\begin{array}{rl} \log V = \log 384{,}48 = & 2{,}5848905 \\ \log a = \log 150 = & 2{,}1760913 \\ \hline \log V - \log a = & 0{,}4087992 \\ \text{dividirt durch } n-1 = 24) & 0{,}0170333 = \log e \end{array}$$

zu welchem nach der Tabelle die Zahl $1{,}04 = \frac{104}{100}$ gehört, mithin ist $\frac{104}{100}$ der Exponent.

§. 87.

Ist von der Progression das letzte Glied oder $V = 1657{,}54$, das erste Glied $a = 186$ und der Exponent $e = \frac{103}{100}$ gegeben, und man wollte die Anzahl Glieder der Reihe wissen, so nehme man (nach §. 82) die Formel $n = \frac{\log V - \log a}{\log e} + 1$.

Man sucht nun erstens, log V, log *a* und log *e*, zweitens, bestimmt die Differenz zwischen log V und log *a*, drittens, diese Differenz dividirt man durch log *e* und viertens, zu dem gefundenen Quotienten addirt man 1., so ergiebt sich *n*.

Nach der Tabelle ist

$$\begin{array}{l} \log V = \log 1657{,}54 = 3{,}2194657 \\ \log a = \log 186 \quad\;\; = 2{,}2695129 \\ \hline \log V - \log a = 0{,}9499528 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \log 103 = 2{,}0128372 \\ \log 100 = 2{,}0000000 \\ \hline \log = 0{,}0128372 \end{array}$$ daher ist

$$n = \frac{0{,}9499528}{0{,}0128372} + 1 = \frac{9499528}{128372} + 1 = 74 + 1 = 75.$$

Die Reihe hat also 75 Glieder.

§. 88.

Wäre von einer Progression das erste Glied $a = 200$ der Exponent $e = \frac{102}{100}$, die Anzahl Glieder $n = 70$ gegeben, und es sollte S die Summe aller Glieder bestimmt werden, so nehme man die Formel (§. 83) nach welcher $S = \frac{a\,e^n - a}{e - 1}$ gefunden worden.

Nun bestimme man zuförderst durch Hülfe der Logarithmen-Zahl $a\,e^n$, nemlich man suche + log e und multiplicire denselben mit n. 2, zu diesem Produkte addirt man den Logarithmus a; diese gefundene Summe giebt den log $a\,e^n$ zu dem man 3, die zustimmende Zahl sucht. Ist die Zahl $a\,e^n$ auf diese Weise gefunden, so subtrahirt man davon 4, das erste Glied a und endlich 5, dividirt man diesen Rest durch den um 1 verkleinerten Exponenten, so erhält man S.

Hiernach ist log 102 = 2,0086002
log 100 = 2,0000000

log = 0,0086002
70 = n

n . log e = 0,6020140
log a = log 200 = 2,3010300

log $a\,e^n$ = 2,9030440

Nimmt man auf die zehntheilige Stellen nicht Rücksicht, so findet man nach der Tabelle $a\,e^n$ = 800 davon
subtrahirt a = 200

$a\,e^n - a$ = 600 und

$$S = \frac{600}{\frac{102}{100} - 1} = \frac{600}{\frac{102}{100} - \frac{100}{100}} = \frac{600}{\frac{2}{100}} = \frac{600 \times 100}{2}$$

= 30000 daher die Summe aller Glieder der Reihe = 30000.

§. 89.

Die Bestimmung der haubaren Classe in den Forstrevieren richtet sich nach der Zeit, in welcher eine Holzart nach den Landes-Bedürfnissen anfängt nutzbar zu werden, und reicht bis dahin, wo das Holz anfängt abzustehen, oder wo man keinen Wachsthum mehr davon erwarten kann. Aus dieser Bestimmung geht hervor, daß das in der als haubar angesprochenen Classe befindliche Holz dem Alter nach immer sehr melirt seyn müsse. Da nun in diesen Classen bei der Abschätzung alles Holz, welches seinem Wuchse nach keine Benutzung als Nutzholz verspricht, als Brennholz angeschlagen wird, und man hierbei ohne Nachtheil nichts anders als das älteste völlig ausgewachsene oder kranke Holz fällen kann, so ist es sehr klar, daß das jüngere in der Classe als Brennholz angegebene Holz, bis ihm die Reihe des Haues trifft, noch nachwachsen müsse, und daß man während dem Haue noch auf einen verhältnißmäßigen Nachwuchs rechnen könne, sobald die Bestimmung des Brennholzes nach oben angegebenem Grundsatze angenommen worden.

Hätte aber ein Taxator nur gänzlich ungesundes Holz oder nur solches Holz als Brennholz angegeben, welches schon in einem solchen Alter steht, daß sich mit Gewißheit auf keinen Wachsthum mehr rechnen läßt, so darf ohne unforstmäßig zu wirthschaften, kein Nachwuchs in Anrechnung gebracht werden.

Diese Betrachtung verursacht in der Forstwirthschaft verschiedene Rechnungen, welche aus den Progressionen, die wir so eben bettachtet haben, hergeleitet werden müssen, und welche ohne die aufmerksamste Behandlung nur sehr schwer, auch wohl oft ganz unrichtig bestimmt werden. Es wird daher in Folgendem der Gegenstand unserer Aufmerksamkeit seyn, zu zeigen,

wie diese Rechnungen von den Progressionen abgeleitet werden müssen, und für jede uns bekannte hierher gehörige Frage eine bequeme Formel aufzufinden, und deren Anwendung zu zeigen.

§. 90.

Um hierbei vom Leichtern zum Schweren über zu gehen, wollen wir zuförderst annehmen, es sey ein Revier seinem Alter nach zwar als haubare Classe angesprochen, das Holz sey aber in einem solchen Alter, daß ohne Nachtheil das Revier noch einige Zeit vom Haue verschont bleiben könne, und die Umstände erlaubten noch eine Schonung von 10 Jahren. Wenn nun bei der Abschätzung dieses Revier 10000 Klafter Inhalt hätte, und durch Versuche ausgemittelt worden, daß man einen Nachwuchs im Verhältnisse von 100:102 annehmen könne, so sey hier die Frage, was aus diesem Revier werden könne, wenn in 10 Jahren darin nicht geholzt werde?

Da 100 Klafter in einem Jahre zu 102 Klaftern heranwachsen, und dies in jedem Jahre so fortfährt, so würde man hier setzen müssen

$$100 : 102 = 10000 : 10000 \times \frac{102}{100}$$

Inhalt nach einem Jahre

$$100 : 102 = 10000 \times \frac{102}{100} : 10000 \times \left(\frac{102}{100}\right)^2$$

Inhalt nach zwei Jahren

$$100 : 102 = 10000 \times \left(\frac{102}{100}\right)^2 : 10000 \times \left(\frac{102}{100}\right)^3$$

Inhalt nach drei Jahren

$$100 : 102 = 10000 \times \left(\frac{102}{100}\right)^3 : 10000 \times \left(\frac{100}{100}\right)^4$$

Inhalt nach vier Jahren.

Mit einiger Aufmerksamkeit wird man hier leicht ein Gesetz gewahr, nach dem die Glieder hier fortlaufen, und man wird nach diesem Gesetze schließen können, daß der Inhalt der Classe nach dem zehnten Jahre werde zu $10000 \cdot \times \left(\frac{102}{100}\right)^{10}$ herangewachsen seyn.

Eben so leicht wird man gewahr, daß die Glieder in einer geometrischen Progression fortlaufen, von der, für diesen besondern Fall, das erste Glied $a = 10000$, der Exponent $e = \frac{102}{100}$, und die Anzahl Glieder jederzeit um 1 größer als die Anzahl Jahre seyn müsse; und daß hier eigentlich verlangt werde, das $n$te Glied einer Reihe zu bestimmen, deren erstes Glied a, der Exponent e und die Anzahl Glieder gegeben sind.

Setzt man nun 10000 oder den Inhalt bei der Abschätzung $= a$, den Exponenten oder das Verhältniß des Nachwuchses $\frac{102}{100} = e$ und 10 oder die Anzahl Jahre, welche in der Classe nicht gehauen werden soll $= n$, so erhält man der allgemeinen Ausdruck $ae^n = V$, wo V den Inhalt der Classe nach n Jahren bedeutet, und welcher nach §. 84. durch Logarithmen sehr leicht berechnet werden kann.

Hierbei ist jedoch noch zu bemerken, daß die Abschätzungen gewöhnlich erst spät im Sommer, oder wohl gar erst im Herbste geschehen, die Berechnungen aber noch von dem nemlichen Etats-Jahre an gerechnet werden, daß man daher von dem ersten Jahre niemals einen Zuwachs rechnen könne. Dieses ändert jedoch in der Formel weiter nichts, als daß man jederzeit für diese Rechnung n um 1 kleiner als die Anzahl Jahre

annehmen müsse, wenn nicht besondere Umstände, wie wir in der Folge sehen werden, eine Ausnahme erfordern.

Diesem nach würde in unserm Beispiele $V = ae^n = 10000 \left(\frac{102}{100}\right)^9$ seyn.

Bedient man sich zur Berechnung dieser Aufgabe der Logarithmen, so ist $\log V = \log a + n \log e$. Man berechne zuförderst $\log e$, multiplicire denselben mit n, addire zum Produkte $\log a$, so erhält man $\log V$, zu dem die Tabelle V selbst angiebt.

$$\begin{array}{rrcl} \text{Nun ist} & \log 102 & = & 2{,}0086002 \\ & \log 100 & = & 2{,}0000000 \\ \hline & \log e & = & 0{,}0086002 \\ & & & 9 = n \\ \hline & n \log e & = & 0{,}0774018 \\ \log a = & \log 10000 & = & 4{,}0000000 \\ \hline & \log V & = & 4{,}0774018. \end{array}$$

Zu diesem Logarithmen sucht man nach §. 77 die zustimmende Zahl, so erhält man

$$\begin{array}{l} 3{,}0773679 = \log 1195 = \log A \\ 3{,}0774018 = \qquad\qquad\quad \log B \\ 3{,}0777312 = \log 1196 = \log C \text{ und} \end{array}$$

$$\log C - \log A : \log B - \log A = C - A : B - A$$

$$3633 \quad : \quad 339 \quad = \quad 1 \quad :$$

$$3633)\ 339{,}00 \,|\, 0{,}09 = B - A$$
$$\underline{32697}$$

mithin ist $V = 11950{,}9 = 11951$ Klafter, Inhalt nach 10 Jahren.

§ 91.

Die in vorigem §. aufgefundene und berechnete Formel, zieht wieder andere Formeln und Berechnungen nach sich. Man kann nemlich in der Gleichung $V = a e^n$ oder in $\log V = \log a + n \log e$ nach und nach jeden Buchstaben als unbekannt annehmen, und die Gleichung auflösen. So kann nemlich die Frage entstehn: in welchem Verhältnisse ist ein Revier nachgewachsen, wenn es vor 10 Jahren 10000 Klafter enthielt, und jezt bei der Abschäzung 11951 Klafter enthält?

Hier ist in der Gleichung $V = a e^n$ der Exponent e als unbekannt angegeben, nimmt man daher die Gleichung $\log V = \log a + n \log e$ und lös't sie für diesen Fall auf, so findet man $\log e = \frac{\log V - \log a}{n}$.

Nach vorigem §. ist

$$\begin{array}{rl} \log V = \log 11951 = & 4,0774018 \\ \log a = \log 10000 = & 4,0000000 \\ \hline \log V - \log a = & 0,0774018 \\ \text{dividirt durch } n = 9) & 0,0086002 = \log e \end{array}$$

welches nach der Tabelle $1,02 = \frac{102}{100}$ oder einen Nachwuchs im Verhältnisse von 100 : 102 angiebt.

Diese Frage kann bei Bestimmung des Nachwuchses in Schlagholz-Revieren vorkommen. Um nemlich hier den Nachwuchs auszumitteln, nehme man einen Plaz von bestimmter Größe in einem Reviere an, wenn es eben in die haubare Classe tritt, schäze denselben genau ab, und schäze ihn sodann, wenn er zum Hau kömmt, noch einmal ab. Hierdurch erhält man

aus der Gleichung $V = a e^n$, das Glied a, das letzte Glied V, und die Anzahl Jahre n und der Exponent e kann nach Umstehendem bestimmt werden.

Da man bei diesem Versuche mit aller Vorsicht verfahren kann und muß, mithin auch die beiden Abschätzungen in einerlei Monaten vornehmen wird, und also den Nachwuchs auf eine volle Anzahl Jahre rechnen kann, so muß für diesen besondern Fall $n =$ der Anzahl Jahre gesetzt werden.

Stellt man diesen Versuch in jedem merklich von einander abweichenden Districte des Reviers an, so wird man aus diesen gefundenen verschiedenen Resultaten für den Nachwuchs ein Verhältniß finden, das man in diesem Revier mit ziemlicher Zuverläßigkeit anwenden kann, wenn nicht besondere Unglücksfälle eine Ausnahme heischen.

Gesetzt, das Revier bestände aus vier merklich von einander abweichenden Districten, von denen

a 100	Morgen	den	Nachwuchs	5	Klafter	auf	100 geben
b 150	=	=	=	4	=	=	=
c 200	=	=	=	3	=	=	=
u. d 50	=	=	=	2	=	=	=

so multiplicire man jede Morgenzahl mit ihrem zustimmenden Nachwuchse, als

$$a, \; 100 \times 5 = 500$$
$$b, \; 150 \times 5 = 600$$
$$c, \; 200 \times 3 = 600$$
$$d, \; 50 \times 2 = 100$$

hierauf summire man die gefundenen Produkte, und dividire diese Summe durch die Summe aller Morgen, so erhält man den mittlern Nachwuchs, den man in

dem Revier annehmen kann, daher $\frac{1800}{500} = \frac{18}{5} = 3\frac{3}{5}$ Klafter Nachwuchs auf 100 Klafter.

§ 92.

Hätte man von einem Schlagholz-Reviere den Zuwachs nach zuverläßigen Grundsätzen ausgemittelt, die jüngern Classen nach gut, mittelmäßig und schlechten Beständen abgeschätzt, und nun fände es sich daß die erste Classe, um die Landes-Bedürfnisse zu befriedigen, früher abgeholzt werden müsse, als die jüngere Classe ihr vollständig haubares Alter erreicht hätte; man fände überdies, daß die jüngere Classe so reichhaltig sey, daß sie einen stärkere Etat wohl erfüllen könne, auch fände sich kein anderes Mittel den Ausfall der ersten Classe zu decken, als die zweite Classe früher zum Hau zu bringen, so würde nun die Abschätzung der jüngern Classe zur Regulirung des Haues bei derselben nicht mehr anwendbar seyn, wenn sie den Hau trifft, weil sie das vergesetzte Alter nicht erreichen können.

Hier könnte daher die Frage vorkommen: Wenn die jüngere Classe, in der Voraussetzung, daß sie ihr haubares Alter erreichen werde, bei ihrer Abschätzung auf 25000 Klafter angegeben worden, sie käme nun aber 5 Jahr früher zum Hau, was kann man sich zu der Zeit an Inhalt von ihr versprechen?

Setzt man hier den Inhalt, so für das haubare Alter bei der Abschätzung berechnet, oder 25000 Klafter $= V$, das bekannte Nachwuchs-Verhältniß 100 : 103 oder $\frac{103}{100} = e$, und die Jahre, welche die Classe früher zum Hau kömmt, also hier $5 = n$, so sieht man leicht, daß in der Gleichung $V = a\,e^n$ die unbe-

kannte

kannte Größe das erste Glied a der Reihe sey, und a ist aus der Gleichung $\log V = \log a + n \log e$ leicht durch Logarithmen zu bestimmen, indem die Auflösung der Gleichung giebt $\log a = \log V - n \log e$.

Man suche nemlich den $\log e$, multiplicire denselben mit n, subtrahire das Produkt von $\log V$, so erhält man $\log a$ und nach der Tabelle a selbst.

$$\text{Also } \log 103 = 2{,}0128372$$
$$\log 100 = 2{,}0000000$$
$$\log e = 0{,}0128372$$
$$5 = n$$
$$n \log e = 0{,}0641860 \text{ subtrahirt von}$$
$$\log 25000 = \log V = 4{,}3979400$$
$$\log a = 4{,}3337540$$

$$\text{Nun ist } 3{,}3336488 = \log 2156 = \log A$$
$$3{,}3337540 = \log B$$
$$3{,}3338501 = \log 2157 = \log C \text{ und}$$
$$\log C - \log A : \log B - \log A = C - A : B - A$$
$$2013 : 1052 = 1 : 0{,}5$$

daher $4{,}3337540 = \log 21565$ oder $a = 21565$ Klafter.

§. 93.

Träte der Fall ein, daß man zu wissen verlangte, wie lange eine noch im Wachsthum stehende Classe gebrauche, um etwa von 20000 bis 23000 Klafter heranzuwachsen, so sieht man, daß hier aus der Gleichung n gesucht wird, und man löse die Gleichung $\log V = \log a + n \log e$ für diesen Fall auf, so erhält man $n = \frac{\log V - \log a}{\log e}$.

Man suche daher den log V und log a, und nehme ihre Differenz, diese Differenz dividire man durch log e, so er giebt sich n, also

$$\begin{aligned} \log 23000 &= \log V = 4{,}3617278 \\ \log 20000 &= \log a = 4{,}3010300 \\ \hline \log V - \log a &= 0{,}0606978 \end{aligned}$$

nach vorigem §. ist log $e = 0{,}0128372$, mithin ist $\frac{0{,}0606978}{0{,}0128372} = \frac{606978}{128372} = 4{,}7 = n$ und man muß annehmen $n = 5$ Jahr.

§. 94.

Häufiger und wichtiger als die in vorigen Paragraphen angeführten Beispiele ist die Frage: Was kann mit Zuwachs grrechnet, von einer haubaren Classe jährlich geholzt werden, wenn das Revier forstmäßig richtig bewirthschaftet werden soll?

Ehe wir zur Beantwortung dieser Frage schreiten, wollen wir zuerst die Frage untersuchen: Was wird aus einem Forstreviere nach n Jahren, wenn man åhrlich ein bestimmtes Quantum b abholzt?

Hier würde man schließen: würde von dem Holz-Quantum a des Reviers nichts geholzt, das Verhältniß des Zuwachses wäre durch e, und die Anzahl der Jahre durch n angegeben, so müste, nach §. 89. $V = a e^n$ werden. Da nun aber ein bestimmtes Quantum b abgeholzt wird, so muß dies für jedes Jahr von a subtrahirt werden; weil aber auch dies Quantum b ebenfalls noch nachgewachsen wäre, wenn es nicht geholzt worden, nnd dieser auf b fallende Nachwuchs in

ae^n mit begriffen ist, so muß man nicht b allein, sondern auch den Nachwuchs berechnen, welcher für jedes Jahr auf b fällt, und von ae^n subtrahiren.

Um uns hier bei dieser Untersuchung einen um so deutlichern Ueberblick zu verschaffen, wollen wir den Gang von Jahr zu Jahr nachfolgen, und uns aus dieser Betrachtung eine allgemeine Regel abzuleiten suchen. Diesemnach schließen wir:

Da der Inhalt der Classe nach der Abschätzung a Klafter beträgt, in dem nemlichen Jahre aber noch b Klafter abgeholzt werden, so kann für dieses Jahr auf a kein Zuwachs gerechnet werden, und es wird am Ende des ersten Jahres $a - b$ der Holz-Bestand bleiben.

Dieser Bestand $a - b$ hat bis zur folgenden Abholzung ein volles Jahr zum Nachwachsen, und wird in dieser Zeit zu $(a - b) \cdot e = ae - be$ heranwachsen, von welchem sodann am Ende des Jahres wieder b Klafter geholzt werden, daher muß am Ende des zweiten Jahres $ae - be - b$ der Holzbestand seyn.

Setzt man diese Schlüsse für die folgende Jahre auf gleiche Art fort, so findet man, daß $(ae - be - b) e - b$ oder $ae^2 - be^2 - be - b$ der Bestand am Ende des dritten Jahres;

$ae^3 - be^3 - be^2 - be - b$ am Ende des vierten Jahres;

$ae^4 - be^4 - be^3 - be^2 - be - b$ am Ende des fünften Jahres u. s. w. seyn müsse.

Bei einiger Aufmerksamkeit wird man hier bald das Gesetz wahr nehmen, nach welchem die Glieder auf einander folgen, denn man sieht, daß a mit e auf die Potenz multiplicirt ist, welche um 1 kleiner ist, als die Anzahl Jahre, und daß davon subtrahirt wird eine Reihe von b, von der das größte Glied b multiplicirt ist, mit dem Exponenten auf die um 1 kleinere Dignität als Anzahl Jahre sind, und daß in jedem folgenden Gliede die Potenz von e um 1 niedriger wird, bis das letzte Glied mit $e^0 = 1$ multiplicirt ist.

Nach diesem Gesetze wird man daher geradezu bestimmen können, wie der Zustand des Reviers am Ende des achten Jahres, so wie am Ende eines jeden bestimmten Jahres beschaffen seyn müsse, es wird nemlich

$ae^7 - be^7 - be^6 - be^5 - be^4 - be^3 - be^2 - be - b$ oder

$ae^7 - (be^7 + be^6 + be^5 + be^4 + be^3 + be^2 + be + b)$ oder

$ae^7 - (b + be + be^2 + be^3 + be^4 + be^5 + be^6 + be^7)$ am Ende des 8ten Jahres, und ganz allgemein.

$ae^{n-1} - (be^{n-1} + be^{n-2} + be^{n-3} + \text{ꝛc.} \ldots\ldots + be^4 + be^3 + be^2 + be + b)$ oder

$ae^{n-1} - (b + be + be^2 + be^3 + be^4 + \text{ꝛc.} \ldots\ldots be^{n-3} + be^{n-2} + be^{n-1})$ der Bestand am Ende des $n$ten Jahres angeben.

Betrachtet man den in der Parenthese stehenden Ausdruck, so sieht man, daß es eine Progression von b ist, und daß die Summe aller Glieder derselben von

ae^{n-1} subtrahirt werden müsse. Nun ist aber (nach §. 83.) die Summe der Glieder oder $S = \frac{be^n - b}{e - 1}$, mithin wird auch $ae^{n-1} - \frac{be^n - b}{e - 1} = V$ seyn, wenn V den Inhalt der Classe nach n Jahren andeutet.

§. 95.

Um diesen Fall durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir annehmen, es sey in einem Kiehnen Reviere die haubare Classe an Brennholz 20000 Klafter $= a$ abgeschätzt worden, die Landes-Bedürfnisse erfordern einen jährlichen Etat von 447 Klaftern $= b$, das Verhältniß des Nachwuchses sey durch Versuche auf 100 : 102 oder $\frac{102}{100} = e$ gefunden worden, man will wissen, ob die Classe stark genug sey den Etat zu erfüllen, oder ob nach Verlauf von 70 Jahren, welche man in dieser Classe wirthschaften muß, noch ein Ueberschuß zu erwarten sey?

Um diese Frage zu beantworten, setze man in die oben gefundene Formel für a, b, e und n die angegebenen Zahlen, und berechne sodann

1) durch Logarithmen den Inhalt von ae^{n-1}.

2) durch Logarithmen die Zahl be^n.

3) von der für be^n gefundenen Zahl subtrahire man b und

4) diese gefundene Differenz dividire man durch den um 1 verkleinerten Exponenten oder $e - 1$, und endlich

5) subtrahire man die No. 4. gefundene Zahl $\frac{be^n - b}{e - 1}$ von der No. 1. für ae^{n-1} gefundenen Zahl, so erhält man V oder den Zustand des Reviers nach n Jahren.

Diesemnach ist 1)

$$\begin{array}{r} \log 102 = 2{,}0086002 \\ \log 100 = 2{,}0000000 \\ \hline \log e = 0{,}0086002 \\ 69 = n - 1 \\ \hline 774018 \\ 516012 \\ \hline (n - 1) \log e = \log e^{n-1} = 0{,}5934138 \\ \log 20000 = \log a = 4{,}3010300 \\ \hline \log a e^{n-1} = 4{,}8944438 \end{array}$$

wozu nach der Tabelle $a e^{n-1} = 78423$ gefunden wird.

2)

$$\begin{array}{r} \log e = 0{,}0086002 \\ 70 = n \\ \hline n \log e = \log e^n = 0{,}6020140 \\ \log 447 = \log b = 2{,}6503075 \\ \hline \log b e^n = 3{,}2523215 \end{array}$$

und die Tabelle giebt $b e^n = 1787{,}80$.

3) $b e^n = 1787{,}80$ davon subtrahirt

$$\begin{array}{r} b = 447 \\ \hline b e^n - b = 1340{,}80 \end{array}$$

4) $b e^n - b = 1340{,}80$ dividirt durch $e - 1 = \frac{2}{100}$ giebt

$$\frac{1340{,}80 \times 100}{2} = \frac{134080}{2} = 67040 = \frac{b e^n - b}{e - 1}$$

Und endlich 5) $ae^{n-1} = 78423$ von No. 1. davon

subtrahirt $\frac{be^n - b}{e-1} = 67040$ von No. 4.

giebt . V $= 11383$ Zustand der Classe nach 70 Jahren.

Dieser beträchtliche Ueberschuß zeigt an, daß diese Classe einen höhern Etat erfüllen kann, und wird deu Forstwirth bestimmen, entweder auf Absatz des Holzes zu denken, oder durch andere Mittel, als Kohlenschwälereien, Potaschsiedereien, Glashütten ꝛc. den Schaden abzuwenden, den das Revier durch Abstehen des Holzes nothwendig erleiden müßte.

§. 96.

Findet man am Ende der Rechnung, daß der letztere Rest oder $V = o$ ist, welches jederzeit der Fall seyn wird, wenn es sich findet, daß $ae^{n-1} = \frac{be^n - b}{e-1}$ ist, oder ist V geringe, daß es etwa nur wenige hundert Klaftern beträgt, so kann man das angenommene Quantum b als den forstmäßig richtigen Etat annehmen, welchen diese Classe leisten kann.

Findet man aber, daß bei No. 4. $\frac{be^n - b}{e-1}$ größer ist, als ae^{n-1} bei No. 1., so läßt sich $\frac{be^n - b}{e-1}$ von ae^{n-1} nicht subtrahiren, oder man erhält einen negativen Rest, und dies ist sodann ein Zeichen, daß die Landes-Bedürfnisse die Kräfte dieser Classe übersteigen, oder daß b zu groß angenommen worden,

und die negative Differenz wird das fehlende Quantum anzeigen. Tritt dieser Fall ein, so muß der Forstwirth sich durch Aenderung des Etats, wenn dies die Umstände erlauben, zu helfen suchen, oder wenn dies nicht seyn kann, auf andere Mittel denkenden Ausfall möglichst zu decken. Z. E. durch Ueberhalten der zweiten Classe, wenn sie dazu reichhaltig genug ist, durch Torfstiche, durch Stubbenradungen, durch Abfinden mit Geld ꝛc.

§. 97.

Es sey die erste Classe eines Buchen-Reviers oder $a = 25000$ Klafter, die jährliche Abholzung $b = 516$ Klaftern das Verhältniß des Nachwuchses $c = \frac{102}{100}$, und man sollte bestimmen, wie stark diese Classe seyn würde, wenn bereits 10 Jahr $= n$ darin geholzt worden. Diese Frage kann bei Eichen- und Buchen-Revieren erster Classe der Mastnutzung wegen vorkommen.

Gesetzt in einem Buchen-Reviere erster Classe, welches vor 10 Jahren 25000 Klafter nach der Abschätzung enthielt, wäre durch Versuche ausgemittelt, daß die Buchmast eben so gut gerathen sey, als vor 10 Jahren, so kann man hieraus nicht folgern, daß man in diesem Jahre werde eben so viel Schweine einfähmen können, als damals, weil aus dem Districte bereits viele Saamen tragende Bäume herausgehauen worden, sondern man wird gegenwärtigen Inhalt berechnen und nach dem Verhältnisse der beiden Inhalte, die Anzahl Schweine bestimmen müssen, welche ohne Nachtheil der Interessenten in diesem Jahre eingefähmt werden können.

Legt man nun die Berechnung wie oben an, so ist

$$
\begin{array}{rl}
1)\ \log 102 & = 2,0086002 \\
\log 100 & = 2,0000000 \\
\hline
\log e & = 0,0086002 \\
& \quad 9 = n - 1 \\
\hline
(n-1)\log e & = 0,0774018 \\
\log 25000 = \log a & = 4,3979400 \\
\hline
\log a e^{n-1} & = 4,4753418
\end{array}
$$

und die Tabelle giebt $a e^{n-1} = 29877$.

$$
\begin{array}{rl}
2)\ \log e & = 0,0086002 \\
& \quad 10 = n \\
\hline
n \log e & = 0,0860020 \\
\log 516 = \log b & = 2,7126497 \\
\hline
\log b e^{n} & = 2,7986517
\end{array}
$$

und die Tabelle giebt $b e^{n} = 629$.

$$
\begin{array}{rl}
3)\ b e^{n} & = 629 \text{ davon subtrahirt} \\
b & = 516 \\
\hline
b e^{n} - b & = 113 \text{ und dies dividirt}
\end{array}
$$

4) durch $e - 1 = \frac{2}{100}$ giebt $\frac{113 \cdot 100}{2} = \frac{11300}{2} = 5650 = \frac{b e^{n} - b}{e - 1}$ nnd endlich

$$
\begin{array}{rl}
5)\ a e^{n-1} & = 29877 \\
\frac{b e^{n} - b}{e - 1} & = 5650 \\
\hline
24227 & = V.
\end{array}
$$

Wenn nun m die Anzahl Schweine gewesen, welche vor 10 Jahren eingefähmt gewesen, so findet man die Anzahl, welche in diesem Jahre eingefähmt werden können, wenn man setzt 25000 : 24227 $= m : x$.

§. 98.

Wir werden uns nunmehr zur Auflösung folgender Frage: Wie viel Brennholz kann mit Nachwuchs gerechnet, jährlich in der haubaren Classe eines Reviers geholzt werden, wenn in n Jahren die ganze Classe abgeholzt seyn soll?

Da nach n Jahren der Inhalt der Classe o bleiben soll, so werden wir in der §. 94. gefundenen Formel, in die Stelle von V, o setzen, und sodann die Gleichung für b auflösen müssen. Hiernach erhalten wir

$$a e^{n-1} - \frac{b e^n - b}{e - 1} = o \quad \text{oder} \quad a e^{n-1} =$$

$$\frac{b e^n - b}{e - 1}, \text{ daher } a e^{n-1} (e - 1) = b e^n - b$$

oder $a e^{n-1} (e - 1) = b (e^n - 1)$, mithin $\frac{a e^{n-1} (e - 1)}{e^n - 1} = b$ eine Formel, welche leicht zu berechnen ist, wenn man sich der Logarithmen bedient. Man suche nemlich durch Logarithmen die Zahl $a e^{n-1}$ und $e^n - 1$ zu bestimmen, setze diese in die Gleichung, und löse sie sodann nach Erforderniß der Zeichen auf, so erhält man b.

Um diese Rechnung durch ein Beispiel näher zu erläutern, wollen wir annehmen, es sey der Brennholz-Bestand der haubaren Classe eines Nadelholz-Reviers 17500 Klafter nach der Abschätzung gefunden, man wüßte ferner durch angestellte Versuche, daß $e = \frac{102}{100}$ in diesen Revieren angenommen werden könne, und es soll bestimmt werden, wie viel Klafter man mit Nachwuchs jährlich abholzen könne, wenn diese Classe in 70 Jahren gänzlich abgeholzt seyn soll?

Man setze $\log 102 = 2,0086002$
$\log 100 = 2,0000000$

$\log e = 0,0086002$
$69 = n - 1$

774018
516012

$(n - 1) \log e = 0,5934138$
$\log 17500 = \log a = 4,2430380$

$\log a e^{n-1} = 4,8364518$ dazu nach der Tabelle $a e^{n-1} = 68620$ gefunden wird.

Ferner ist $\log e = 0,0086002$
$70 = n$

$n \log e = 0,6020140$, und die Tabelle giebt e^n 3,999, mithin ist $e^n - 1 = 2,999$.

Setzt man diese gefundenen Wrrthe in die Gleichung, und zugleich für $e - 1$ den Werth $\frac{2}{100} = 0,02$ so erhält man

$$\frac{ae^{n-1}(e-1)}{e^n-1} = \frac{68620 \cdot 0{,}02}{2{,}999} = \frac{1372{,}40}{2{,}999} =$$

$$\frac{1372400}{2999} = 457{,}6 \text{ Klafter} = b.$$

§. 99.

Sollte bestimmt werden, wie viel der ganze Nachwuchs beträgt, auf den man während dem Haue der ersten Classe rechnen kann, so suche man zuförderst nach vorigem §. das Abholzungs-Quantum b, multiplicire dies mit der Anzahl Jahre, welche in dieser Classe gewirthschaftet wird, und davon subtrahire man a, so giebt der Rest den verlangten Nachwuchs an.

So ist z. E. in unserm Beispiele

$$\begin{array}{r} b = 457{,}6 \text{ Klafter} \\ 70 = n \\ \hline 32032 = nb \\ 17500 = a \\ \hline 14532 \end{array}$$

= Nachwuchs, auf welchen man während dem Haue rechnen kann. Es ist nemlich nb das gonze in n Jahren abgeholzte Quantum, mithin muß darin nicht nur a, sondern auch der gesuchte Nachwuchs enthalten seyn, daher denn jederzeit $nb - a$ den Nachwuchs angeben muß auf welchen man beim Haue rechnen kann.

Wüßte man im umgekehrten Falle, wie viel Nachwuchs man von a Klafter während dem Haue rechnen könnte, so würde man leicht das Abholzungs-Quantum b finden, wenn man z. E. setzt

$$\begin{array}{rl} a = & 17500 \text{ Klafter} \\ \text{Nachwuchs} = & 14532 \quad — \\ \hline & 32032 \text{ Klafter Inhalt, inclusive} \end{array}$$

Zuwachs, mithin $\frac{32032}{70} = 459,6$ Klafter $= b$ wie oben gefunden.

§. 100.

Ist das jährlich zu holzende Quantum b nach diesen Grundsätzen mit Nachwuchs berechnet, so darf der Forstwirth ohne nachtheilige Folgen keine Vorgriffe bei dem Haue wagen, denn jeder Vorgriff, er sey nun durch Unglücksfälle oder durch andere Umstände, als Vorschüsse ꝛc. verursacht, verändert mehr oder weniger den ganzen Etat, je nachdem er beträchtlich oder unbeträchtlich ist.

Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir annehmen: es sey in der §. 98. angenommenen Classe bereits 10 Jahre gewirthschaftet, als durch einen Windbruch 1345 Klafter nach genauer Abschätzung gelagert werden.

Soll nun der Gang der Geschäfte in Ordnung erhalten werden, so muß entweder durch eine neue Abschätzung der Bestand, so wie der Etat von neuem bestimmt, oder durch Rechnung angegeben werden. In diesem letztern Falle legt man die Rechnung wie folget an.

Man bestimme zuerst nach §. 95., den Inhalt, welchen das Revier haben muß zur Zeit, da der Windbruch einfiel.

Zweitens subtrahire man davon das gelagerte Quantum, so giebt der Rest den noch stehenden Inhalt der Classe.

Drittens untersuche man, wie lange man mit dem gelagerten Holze die Landes-Bedürfnisse erfüllen könne, und suche, nach §. 90., zu dem No. 2. gefundenen Inhalt für diese Zeit das daraus entstehende Quantum, wenn so lange nicht darin geholzt werden darf.

Viertens. Zu diesem nun gefundenen Inhalt bestimme man nach §. 98. für die noch zu holzenden Jahre das Abholzungs-Quantum b, so zeigt der Unterschied von dem jetzt und zuerst gefundenen b den Nachtheil, welcher dem Reviere durch dies Unglück zugewachsen ist.

Diesemnach setze man: 1) nach §. 95. ist $a e^{n-1} - \frac{b e^n - b}{e^n - 1} = V$,

$$\begin{aligned} \text{mithin } \log e &= 0{,}0086002 \\ 9 &= n-1 \\ (n-1)\log e &= 0{,}0774018 \\ \log 17500 = \log a &= 4{,}2430380 \\ \log a e^{n-1} &= 4{,}3204398 \end{aligned}$$

dazu nach der Tabelle $a e^{n-1} = 20914$

$$\begin{aligned} \text{Ferner } \log e &= 0{,}0086002 \\ 10 &= n \\ n \log e &= 0{,}0860020 \\ \log 457{,}6 = \log b &= 2{,}6604860 \\ \log b e^n &= 2{,}7464880, \end{aligned}$$

dazu nach der Tabelle $b e^n = 557{,}81$, mithin ist $b e^n - b = 557{,}81 - 457{,}6 = 100{,}21$ und

$$\frac{be^n - b}{e-1} = \frac{100,21}{(\frac{2}{100})} = \frac{100,21 \times 100}{2} = \frac{10021}{2} =$$

5010, daher denn

V = 20914 — 5010 = 15904 gefunden wird. Subtrahirt man hiervon 2) 1345 Klafter, gelagertes Quantum, so giebt der Rest 14559 Klafter noch stehenden Inhalt des Reviers.

3) Das gelagerte Quantum beträgt 1345 Klafter *)
die jährliche Abholzung . . . 457,6 — mithin erfüllen diese den Hau in $\frac{1345}{457,6} = \frac{13450}{4576} =$ 3 Jahre, und in diesen Jahren darf in dem stehenden Holze nicht geholzt werden.

Nach §. 90. ist $a\,e^n = V$, mithin setze man

$$\log e = 0,008602$$
$$3 = n^{**})$$
$$n \log e = 0,0258006$$
$$\log 14559 = \log a = 4,1631315$$

$\log a e^n = \log V = 4,1889321$ und nach der Tabelle ist V = 15450 = Inhalt der Classe, worin nun noch 70 — 10 — 3 = 70 — 13 = 57 Jahre geholzt werden muß.

---

*) Zu dem gelagerten Quantum muß das auf das Jahr bereits gefällte Holz mit zugerechnet werden.

**) Daß hier in diesem Falle $n = 3 =$ der Anzahl Jahre angenommen, ist geschehen, weil der gefundene Inhalt 14559 wirklich 3 volle Jahre bis zum ersten Hau nachwachsen kann, welches bei §. 90. nicht der Fall war.

Zu diesem gefundenen Inhalte bestimme man 4) auf 57 Jahr das Abholzungs-Quontum nach §. 98. nach der Formel $\frac{a e^{n-1}(e-1)}{e^n - 1} = b$.

$$\begin{array}{rl} \text{so ist } \log e = & 0{,}0086002 \\ & 56 = n - 1 \\ \hline & 516012 \\ & 430010 \\ \hline (n-1)\log e & 0{,}486112 \\ \log 15450 = \log a = & 4{,}1889321 \\ \hline \log a e^{n-1} = & 4{,}6705433 \end{array}$$

und die Tabelle giebt $a e^{n-1} = 46832$.

$$\begin{array}{rl} \log e = & 0{,}0086602 \\ & 57 \\ \hline & 602014 \\ & 430010 \\ \hline n \log e = & 0{,}4902114 \end{array}$$

daher e^n selbst $= 3{,}092$ mithin ist $e^n - 1 = 2{,}092$, und

$$\frac{46832 \times 0{,}02}{2{,}092} = \frac{936{,}64}{2{,}092} = \frac{936640}{2092} = 447{,}7 = b$$

Nun war vor dem Windbruch das Abholzungs-Quantum 457,6, mithin ist der Schade, welcher der Forst durch diesen Vorgriff geschahe jährlich auf 10 Klafter zu rechnen, obgleich man alles gelagerte Holz in Anrechnung gebracht, welches bei dergleichen Unglücksfällen wohl niemals angenommen werden darf, weil es zum Theil der Ungewohnheit wegen schwer ist, gelagertes Holz genau zu schätzen, theils auch weil man

sich

sich dabei vorsieht nicht zum Nachtheil des Forstbedienten zu schätzen, und weil in holzbedürftigen Gegenden, gewiß bei solchen Gelegenheiten viel Holz verloren geht.

Dies Beispiel wird hinreichend seyn, um daraus zu sehen, wie man in diesem vorkommenden Falle die Rechnung anzulegen habe, aber auch zugleich den Forstwirth zeigen, wie sehr er sich zu hüten habe, um nicht durch unzeitige Gefälligkeit durch Vorschüße oder dergleichen sein Revier zu ruiniren, so wie es gleichfalls den Taxator zeigen kann, wie sehr er sich in Acht zu nehmen habe, nicht durch ein zu hoch angenommenes Nachwuchs-Verhältniß, oder gar durch eine unachtsame Abschätzung das Abholzungs-Quantum zu erhöhen, weil der Schade, welcher hierdurch dem Revier zuwächst, nie wieder einzubringen oder durch Oeconomie zu verbessern ist.

§. 101.

Auf die in vorigem §. gemachte Erfahrung muß man vorzüglich in holzarmen Gegenden, bei melirten Revieren Rücksicht nehmen. Sind zum Beispiel in der haubaren Classe eines Kiehnen-Reviers alte Eichen, welche nach dem Urtheil des Taxators in 30 Jahren, Birken und Elsen erster Classe, welche in 18 Jahren geholzt werden müssen, melirt, und man wollte diese nun nach ihren Jahren zum Hau verrechnen, zugleich aber das Kiehnen-Brennholz durch alle 70 Jahre in gleichen Hau bringen, so würde man in den ersten Jahren, des Zuschusses durch die Eichen und Elsen wegen, vielleicht einen Ueberfluß, in den letztern Jahren aber, wo diese fehlen, einen Mangel

haben. Dieser Mangel muß dadurch abgeholfen werden, daß man den Hau so dirigirt, daß in allen 70 Jahren ein gleicher Ertrag hervorgebracht werde, und man kann es als Forstwiedrig ansehen, und als Vorgriffe betrachten, wenn man dies außer Acht läßt, welche jederzeit um so nachtheiliger seyn werden, je größer die Klafterzahl der melirten Holzarten ist, denn das Kiehnenholz, welches man in den ersten Jahren zuviel abholzen läßt, würde durch seinen Nachwuchs den Ertrag noch um ein beträchtliches erhöhen.

Um diese Aufgabe aufzulösen, berechne man zuförderst das Abholzungs-Quantum von den in den Kiehnen melirten Holzarten, als den Eichen und Elsen, und verwandle dies nach Verhältniß der Preise in Kiehnenholz. Wobei wir annehmen wollen, daß 4 Klafter Kiehnen auf 3 Klafter Büchen, 5 Klafter Kiehnen auf 4 Klafter Eichen, und 13 Klafter Kiehnen auf 12 Klafter Elsen gerechnet werden.

Nach dieser Berechnung sey b das Abholzungs-Quantum der Eichen in Kiehnen verwandelt, und c das der Elsen in Kiehnen verwandelt.

Nehmen wir nun an, daß der Hau alle 70 Jahre hindurch in gleichem Ertrag fortlaufen soll, so müssen nothwendig in den ersten 18 Jahren, so lange die Elsen reichen, und Elsen und Eichen gehauen werden, weniger Kiehnen gehauen werden, als in den zweiten 12 Jahren, wo nur Kiehnen und Eichen, und noch weniger als in den leztern 40 Jahren, wo blos Kiehnen gehauen werden können.

Wir werden hiernach 3 Holzungs-Perioden annehmen müssen, wo in den 1sten 18 Jahren x Klafter

Kiehnen, b Klafter Eichen und c Klafter Elsen, in den 2ten 12 Jahren y Klafter Kiehnen, b Klafter Eichen, und in den 3ten 40 Jahren z Klafter Kiehnen geholzt werden müssen.

Auf dem erstern Anblick scheint es, als wenn in dieser Aufgabe drei unbekannte Größen gesucht werden müßten, allein bei genauerer Prüfung sieht man bald, daß man nur nöthig hat, x zu suchen, und daß sodann y so groß seyn müsse, als $x + c$, so wie $z = x + b + c$ weil nach der Bedingung der Aufgabe $x + b + c = y + b = z$ seyn soll.

§. 102.

Um nun x zu bestimmen, setze man anfänglich x als bekannt voraus, und suche nach §. 94, wie viel Inhalt man behalten wird, wenn man 18 Jahre hindurch von den A Klafter Kiehnen jährlich x Klafter abholzt. Hierdurch wird

$$Ae^{17} - \frac{xe^{18} - x}{e - 1} = Ae^{17} - \frac{x(e^{18} - 1)}{e - 1} = V$$

gefunden.

Setzt man dies Verfahren für die zweiten 12 Jahre fort, nemlich man berechnet den Inhalt, welcher von V nach 12 Jahren bleibt, wenn man jährlich Y Klafter abholzt, so ist *) $Ve^{12} - y\frac{(e^{12} - 1)}{e - 1} = U$

In dieser Gleichung setze man für V den oben gefundenen Werth, so ist

$$\left(Ae^{17} - \frac{x(e^{18} - 1)}{e - 1}\right) e^{12} - y\frac{(e^{12} - 1)}{e - 1} =$$

$$Ae^{29} - \frac{x(e^{18} - 1)\, e^{12}}{e - 1} - \frac{y(e^{12} - 1)}{e - 1} = U$$

*) Siehe umstehende Anmerkung.

oder $Ae^{29} - x\frac{(e^{30} - e^{12})}{e-1} - y\frac{(e^{12} - 1)}{e-1} = U.$

Setzt man obiges Verfahren auch für U fort, so wird endlich *) $Ue^{40} - z\frac{(e^{40} - 1)}{e-1} = o$, weil mit der letzten Periode die ganze Classe abgeholzt seyn muß.

Wird nun noch in dieser Gleichung für U der gefundene Werth substituirt, so erhält man

$$\left(Ae^{29} - x\frac{(e^{30} - e^{12})}{e-1} - y\frac{(e^{12} - 1)}{e-1}\right)e^{40}$$
$$- z\frac{(e^{40} - 1)}{e-1} = o$$

oder $Ae^{69} - x\frac{(e^{30} - e^{12})e^{40}}{e-1} - y\frac{(e^{12} - 1)e^{40}}{e-1}$
$$- z\frac{(e^{40} - 1)}{e-1}$$
$$= Ae^{69}(e-1) - x(e^{70} - e^{52}) - y(e^{52} - e^{40})$$
$$- z(e^{40} - 1) = o.$$

In dieser Gleichung setze man für y und z die oben gefundenen Werthe, so ist $Ae^{69}(e-1) = x(e^{70} - e^{52}) + (c+x)(e^{52} - e^{40}) + (b+c+x)(e^{40} - 1) = o$, oder wenn man die angedeutete Multiplicationen wirklich verrichtet, $Ae^{69}(e-1) = xe^{70} - xe^{52} + ce^{52} - ce^{40} + xe^{52} - xe^{40} +$

---

*) Daß hier der Exponent e nicht auf die Dignitaten e^{11} und e^{39} gesetzt sind, wie dies nach §. 94. seyn sollte, und auch bei Ae^{17} geschehen ist, kommt daher, weil man bei der ganzen Classe während der Holzung nur vom 1sten Jahre keinen Nachwuchs, von allen andern Jahren aber jederzeit Nachwuchs rechnen kann.

$be^{40} - b + ce^{40} - c + xe^{40} - x = o$, und wenn man alles aufhebt, was sich aufheben läßt, so erhält man $Ae^{69}(e-1) = xe^{70} - x + ce^{52} - c + be^{40} - b = x(e^{70} - 1) + c(e^{52} - 1) + b(e^{40} - 1)$, daher ist $\frac{Ae^{69}(e-1) - [c(e^{52} - 1) + b(e^{40} - 1)]}{e^{70} - 1}$ $= x$ eine Formel, welche so schwer in der Anwendung eben nicht ist.

Ist auf diesem Wege durch die Formel erst x gefunden, so zeigen die Gleichungen $x + c = y$ und $x + b + c = z$ sehr leicht den Weg, auf welchen man y und z finden kann.

§. 103.

Betrachtet man das Verfahren im vorigen §., so wie die Formel, so ergiebt sich für diese Rechnung folgende Regel:

1) Man suche das jährliche Abholzungs-Quantum von einer jeden in der dominirenden Holzart melirten Holzart, und verwandle es in Holz der dominirenden Classe. Hierdurch erhält man b und c.

2) Man bestimme nach den Jahren, welche in den verschiedsnen Holzarten geholzt werden muß, die Abholzungs-Perioden, als
   1ste Periode von 18 Jahren, weil 18 Jahr in den Elsen,
   2te Periode von 12 Jahren, weil 18 + 12 = 30 Jahr in den Eichen, und
   3te Periode von 40 Jahren, weil 18 + 12 + 40 = 70 Jahr in den Kiehnen geholzt werden muß.

3) Suche man nach aus dem Vorhergehenden bekannten Grundsätzen das Glied $Ae^{69}(e-1)$.

4) Erhebe man den Exponenten e auf die Dignität, welche anzeigt, wie viel Jahre nach dem Haue der Elsen bis zum Ende der Classe verlaufen, subtrahire davon 1, und multiplicire es mit den für die Elsen gefundene Anzahl Klafter c, wodurch $c(e^{52}-1)$ gefunden wird.

Eben so verfahre man mit dem Exponenten in Rücksicht auf das Quantum, welches für die Eichen gefunden worden, und bestimme dadurch $b(e^{40}-1)$.

5) Diese No. 4 gefundene Zahlen $c(e^{52}-1)$ und $b(e^{40}-1)$ addire man, und subtrahire deren Summe von den No. 3 gefundenen $Ae^{69}(e-1)$.

6) Endlich erhebe man noch den Exponenten e auf die Potenz, welche die ganze Anzahl Jahre des Haues in der Classe angiebt, subtrahire davon 1, und mit diesen $e^{70}-1$ dividire man die No. 5 gefundene Zahl, so giebt der Quotient x an.

§. 104.

Um diese Rechnung durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir die §. 101 gegebene Aufgabe berechnen, und dabei annehmen, daß der Inhalt der dominirenden Classe 12500 Klafter Kiehnen sey, und daß darin 586 Klafter Eichen, und 2570 Klafter Elsen melirt gefunden worden. Daß ferner die Kiehnen in 70, die Eichen in 30, und die Elsen in 18 Jahren abgeholzt werden müssen. Legt man nun die Rechnung vorbeschriebener Maßen an, so wird seyn.

No. 1. Für die Eichen

$$\begin{array}{l}
\log. 1013 = 3,0056094 \\
\log. 1000 = 3,0000000 \\
\hline
\log.\ e = 0,0056094 \\
\qquad\qquad 29 = n-1 \\
\hline
\qquad 504846 \\
\qquad 112188 \\
\hline
(n-1)\log. e = 0,1626726 \\
\log. 586 = \log. a = 2,7678976 \\
\hline
\log. ae^{n-1} = 2,9305702
\end{array}$$

dazu nach der Tab.

$$\begin{array}{l}
ae^{n-1} = 852,26 \\
\qquad 0,013 \\
\hline
\qquad 255678 \\
\qquad 85226 \\
\hline
11,07938 = ae^{n-1}(e-1)
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\log. e = 0,0056094 \\
\qquad\qquad 30 \\
\hline
n \log. e = 0,1682820
\end{array}$$

dazu 1,4733

mithin $e^n - 1 = 0,4733$ und

$\frac{11,0794}{0,4733} = \frac{110794}{4733} = 23,408$ = Abholzungs-Quantum der Eichen.

Setzt man nun

$$\begin{array}{l}
4:5 = 23,408 \\
\hline
4)\ 1:5 = 5,852 \\
\qquad\qquad 5 \\
\hline
\qquad 29,260
\end{array}$$

= dem Kiehnenholze, welches man für die gefundene 23,408 Klafter Eichen rechnen kann, und welches in der Formel durch b angegeben ist.

Für die Elsen

$$\log. 102 = 2{,}0086002$$
$$\log. 100 = 2{,}0000000$$
$$\log. e = 0{,}0086002$$
$$17 = n - 1$$
$$602014$$
$$86002$$
$$(n-1)\log. e = 0{,}1462034$$
$$\log. 2570 = \log. a = 3{,}4099331$$

$\log. ae^{n-1} = 3{,}5561365$ dazu nach der Tab.

$$ae^{n-1} = 3598{,}7$$
$$0{,}02$$
$$71{,}974 = ae^{n-1}(e-1)$$
$$\log. e = 0{,}0086002$$
$$18 = n$$
$$688016$$
$$86002$$

$n \log. e = 0{,}1548036$ dazu $1{,}4282$ und $e^{n} - 1 = 0{,}4282$, mithin ist

$\frac{71{,}974}{0{,}4282} = \frac{719740}{4282} = 168{,}08 =$ Abholzungs-Quantum der Elsen,

und man setzt $12 : 13 = 168{,}08$

$$13$$
$$50424$$
$$16808 \quad (12$$
$$2185{,}04 \,|\, 182{,}08$$
$$921$$

$182{,}08 =$ dem Kiehnenholze, welches man für die Elsen rechnen kann, und welches in der Formel durch c angegeben ist.

No. 2. Die Abholzungs-Perioden sind §. 101 angegeben, nemlich

1ste Periode 18 Jahr in den Elsen,
2te — 12 — in den Eichen,
3te — 40 — in den Kiehnen.

No. 3. Um $Ae^{n-1}(e-1)$ zu bestimmen.

$$
\begin{array}{r}
\log. e = 0{,}0086002 \\
69 = n-1 \\
\hline
774018 \\
516012 \\
\hline
(n-1)\log. e = 0{,}5934138 \\
\lg. 12500 = \lg. A = 4{,}0969100 \\
\hline
\log. Ae^{n-1} = 4{,}6903238
\end{array}
$$

und $Ae^{1-n} = 49014$

$$
\begin{array}{r}
e-1 = 0{,}02 \\
\hline
Ae^{n-1}(e-1) = 980{,}28
\end{array}
$$

No. 4. Um $c(e^{52}-1)$ zu finden, setze man

$$
\begin{array}{r}
\log. e = 0{,}0086002 \\
52 \\
\hline
172004 \\
430010 \\
\hline
\log. e^{52} = 0{,}4472104
\end{array}
$$

dazu 2,8003 mithin

$$
\begin{array}{r}
e^{52}-1 = 1{,}8003 \\
c = 182{,}08 \\
\hline
144024 \\
36006 \\
144024 \\
18003 \\
\hline
327{,}798624 = c(e^{52}-1).
\end{array}
$$

Um $b\,(e^{40}-1)$ zu finden

$$\log. e = 0{,}0086002$$
$$40$$
$$\log. e^{40} = 0{,}3440080$$ dazu 2,208 und

$$e^{40}-1 = 1{,}208$$
$$b = 29{,}26$$

7248
2416
10872
2416

$$35{,}34608 = b\,(e^{40}-1).$$

No. 5. Nach No. 4 ist

$$c(e^{52}-1) = 327{,}80$$
$$b(e^{40}-1) = 35{,}35$$
$$c(e^{52}-1)+b(e^{40}-1) = 363{,}15$$ dies subtrah. von
$$Ae^{n-1}(e-1) = 980{,}29$$
$$617{,}14$$
$$= Ae^{n-1}(e-1)-[c(e^{52}-1)+b(e^{40}-1)]$$

No. 6. setze man

$$\log. e = 0{,}0086002$$
$$70$$
$$n\log. e = 0{,}6020140$$ dazu 3,9996 = 4

mithin ist $e^n-1=3$ und

$$\frac{Ae^{n-1}(e-1)-[c(e^{52}-1)+b(e^{40}-1)]}{e^n-1} =$$

$$\frac{617{,}14}{3} = 205{,}71 = x$$

Also ist auch

$$x + c = 205{,}71 + 182{,}08 = 387{,}79 = y \text{ und}$$

$$x + b + c = y + b = 387{,}79 + 29{,}26 = 417{,}05 = z$$

Die Richtigkeit dieses Verfahrens, so wie überhaupt dieser Formel läßt sich übrigens leicht einsehen, denn wenn man durch alle 70 Jahre x Klafter abholzt, so drückt $\frac{x(e^{70}-1)}{e-1}$ das ganze Abholzungs-Quantum von x aus. Der Theil der Abholzung, welcher in den letztern 52 Jahren die Stelle der Elsen vertritt, ist bekannt, und ist $\frac{c(e^{52}-1)}{e-1}$, so wie der Theil, welcher die letztern 40 Jahr die Eichen ersetzen muß, durch $\frac{b(e^{40}-1)}{e-1}$ nach §. ausgedrückt ist.

Hieraus ergiebt sich offenbar, daß

$$Ae^{69} = \frac{x(e^{70}-1)}{e-1} + \frac{c(e^{52}-1)}{e-1} + \frac{b(e^{40}-1)}{e-1}$$

seyn müsse, aus welcher sich obige Formel ergiebt.

§. 105.

Um den Unterschied zu sehen, den das auf diesem Wege berechnete Quantum gegen das giebt, welches man finden würde, wenn man das Kiehnenholz die 70 Jahre hindurch in gleichen Quantitäten abholzen wollte, so wollen wir nach §. 98 suchen, wie viel Klafter man in den 70 Jahren von den 12500 Klaftern jährlich abholzen kann.

Nach vorigen §. No. 3 ist $Ae^{n-1}(e-1 = 980{,}28$
nach No. 6 ist $e^{n}-1 = 3$ und

$$\frac{Ae^{n-1}(e-1}{e^{n}-1} = \frac{980{,}28}{3} = 326{,}76 = b$$

Dieses b mit 70 multiplicirt, giebt das ganze Quantum, welches mit Nachwuchs von der ganzen Classe gehauen werden kann, — mithin ist $326{,}76 \times 70 =$ 22873 Klafter.

Nimmt man nun

$18x = 205{,}71 \times 18 = 3702{,}78$ von der 1sten Periode
$12y = 387{,}79 \times 12 = 4653{,}48$ — 2ten —
$40z = 417{,}05 \times 40 = 16682{,}00$ — 3ten —

25038,26 = dem ganzen Abholzungs-Quantum der Kiehnen, so ist
$25038{,}26 - 22873 = 2165$ Klafter das Quantum, um welches man durch diesen Vorgriff dem Revier Schaden zufügen würde, welches jährlich auf 31 Klafter beträgt.

Der Forstwirth darf übrigens nicht glauben, daß sein Revier durch dieses erhöhte Abholzungs-Quantum leiden könne, denn der Unterschied kömmt hier nicht durch einen stärker angenommenen Nachwuchs, sondern durch die Oekonomie, daß man in den ersten Jahren, wo andere Holzarten der dominirenden zu Hülfe kommen, in dieser Holzart spart, und dadurch den Nachwuchs so befördert, daß das stärkere Abholzungs-Quantum in den Jahren gehauen werden kann, wo diese Hülfe, der Natur nach, aufhören muß.

Uebrigens ist hierbei genau Acht zu geben, daß man diese Rechnung nicht in Holzarten anlegt, welche nach ihrer Abholzung, in ihren jüngern Classe oder in

einem neuen Turnus wieder eintreten. Diese Rechnung kann also nur einzig dann Statt finden, wenn unter einer dominirenden Holzart eine andere sich findet, auf deren Wiederanbau durchaus nicht gerechnet werden kann.

Eben so wenig ist die Meinung mit jeden einzelnen Blocke eines Reviers so zu verfahren, dies würde die Schwierigkeiten ohne Noth vermehren, denn es kann leicht der Fall seyn, daß in einem Blocke in den Anfangsjahren eine Holzart das Abholzungs-Quantum vermehrt, wenn diese aber aufhört, in einem andern Blocke eine andere Holzart eintritt, welche wieder ein Gleichgewicht hervorbringt.

Es muß also diese Rechnung nur einzig dann angelegt werden, wenn man bei Vergleichung des ganzen Reviers findet, daß eine Holzart, oder einige unter eben gegebener Einschränkung, Schuld daran sind, daß das Abholzungs-Quantum in den Jahren des Turnus besonders ungleich ausfällt.

§. 106.

Um von den vorbeschriebenen Rechnungen, und angemerkten, besondern einzelnen Fällen, nunmehr auch eine Anwendung im Ganzen zu machen, so wollen wir nach und nach das ganze Taxationsgeschäft durchgehen, und dabei den Taxator vom ersten Anfang, bis zur Einreichung seiner Tabellen nachfolgen.

Wenn ein Forstrevier abgeschätzt werden soll, so muß dasselbe jederzeit vorher vermessen und eingetheilt seyn, und von dieser Vermessung und Eintheilung muß

dem Taxator zur Regulirung des Taxations-Geschäfts eine große Brouillon-Karte zugestellt werden. Diese Karte dient sodann demselben sich eine allgemeine Kenntniß von dem Reviere zu verschaffen; andern Theils gereicht sie auch dem Departement zu einem Leitfaden, nach welchem sie das ganze Geschäfte des Taxators Schritt vor Schritt nachgehen, und in Vergleichung seiner gemachten Anmerkungen, die Vorschläge desselben beurtheilen, und hiernach entweder annehmen, modificiren oder verwerfen kann.

Da man in jetzigen Zeiten nicht mehr für die Abtreibung bestimmter Distrikte oder Schläge gestimmt ist, sondern das Abholzungs-Quantum nach dem wahren Bestande der Holzarten bestimmt, so kann eine jede willkührliche Eintheilung des Reviers, sey es auch die natürliche, welche sich durch vorgefundene Wege Gewässer, und andere in der Karte herausgemessene Grenzen ergiebt, den vorgesetzten Zweck erfüllen. Wenn daher eine Eintheilung anzurathen ist, so ist es die in Jagen, weil hierbei die Eintheilung der Vermessung vorangehn, und dem Conducteur bei der Vermessung selbst ein Netz zur Haltung und mehrerer Siche heit darbietet.

§. 107.

Soll das Geschäft so eingerichtet werden, daß es sowohl dem Taxator als dem Departement zu ihren besondern Zwecken nützlich seyn kann, so ist leicht einzusehn, daß dies nach einem festen Leitfaden, und mit einer pünktlichen Ordnung so geschehn müsse, daß man jeden Schritt des Taxators folgen könne.

Zu dem Ende macht Taxator den Anfang des Geschäfts mit einer allgemeinen Betrachtung des Reviers nach der großen Brouillon-Karte mit Zuziehung des Forstbedienten. Von dieser Betrachtung wird ein Protokoll angefertigt, und hat der Taxator dabei ohngefehr auf folgende Punkte sein Augenmerk zu richten.

1) Lage des Reviers, nebst den verschiedenen Entfernungen der Theile nach der Karte.

2) Ob die nothwendige Uebersicht des Reviers erreicht werden kann, und wenn dies nicht seyn kann, Vorschläge zur Verbesserung.

3) Wie die Unterthanen der Gegend beschaffen sind, ob sie wohlhabend oder arm sind, und ob sie Raff- und Leseholz aus dem Revier erhalten, welches die Uebersicht desselben erschwert.

4) Ob in der Nähe adliche und starke Privathaiden befindlich, oder ob alle Bedürfnisse der Gegend aus dem Revier genommen werden müssen.

5) Ob einige Dörfer eigne Holzungen haben, aus denen sie ihren Bedarf ganz oder zum Theil nehmen können, und ob einige derselben Anlagen gemacht haben, oder zu machen geneigt sind, welche dem Holzmängel in Zukunft abhelfen können.

6) Wenn Holzmangel in der Gegend ist, ob derselbe etwa durch Holzverschwendung entstehe, worin diese bestehen, z. E. holzverzehrende Werke, und welche es sind, durch hölzerne Zäune, viele Backöfen, schlechte Einrichtung der Oefen

beim Brennholze, und durch schlechte Bauanstalten im Bauholze.

7) Wie dem Holzmangel abzuhelfen; z. E. durch Abschaffung der hölzernen Zäune, der vielen Backöfen, Verbesserung der Oefen, Weidenpflanzungen der Unterthanen, durch Aufsuchen des Torf, und durch andre Arrangements in den Forsten, durch Abschaffung holzverzehrender Werke, wenn dergleichen im Revier befindlich sind, welche nicht unumgänglich beibehalten werden müssen, in Absicht des Brennholzes durch Verbesserungen und Ersparnisse der Bauten im Bauholze.

8) Wenn in den Revieren Ueberschuß ist, wie derselbe am vortheilhaftesten verwendet werden kann, entweder durch Flößereien und Verkauf auswärts, oder durch Anlagen von Glashütten, Schneidemühlen, Kohlschwälereien, Potatschsiedereien ꝛc.

9) Was für verschiedene Nutzhölzer in der Gegend abgesetzt werden können.

10) Was für Onera auf das Revier liegen, an Frei- und Deputatholz ꝛc.

11) In welchem Verhältnisse das Revier in Absicht der Hütung mit den Hütungsinteressenten stehen.

12) Wie die Maßnutzung beschaffen.

13) Benutzung der Borke in Eichen Oberholz oder Schlagholz-Revieren.

14) In welche Hauptabtheilungen, oder Blocke das Revier eingetheilt sey, und wie jeder Block in sich eingetheilt ist.

15) Ob die Eintheilung zur Direktion der verschiedenen Benutzung des Reviers zweckmäßig sey oder nicht.

16) Wie das Revier am zweckmäßigsten bewirthschaftet werden müsse, und ob man im Laubholze auf Oberholz oder Schlagholz, oder auf Ober- und Unterholz zugleich zu sehen habe.

17) Ordnung nach welcher man das Taxationsgeschäft am besten verrichten könne.

§. 108.

Hat man sich nun nach der Karte über alle diese und andere ähnliche der Localität angemessene Gegenstände gehörig besprochen, alle Bemerkungen des Forstbedienten im Protokolle notirt, und sich dadurch zum eigentlichen Geschäfte vorbereitet, so schreitet man zur Besichtigung des Reviers im Allgemeinen. Zu dem Ende begiebt sich Taxator versehen mit der Forstkarte und mit Zuziehung des Forstbedienten ins Revier selbst, sucht jeden Theil im Allgemeinen durch, und hat dabei vorzüglich auf folgende Gegenstände sein Augenmerk zu richten, und darüber wieder ein genaues Protokoll anzufertigen.

1) In Absicht der Grenzen. Ob dieselbe sehr irregulair, und ob große, lange und spitzige Theile der Grenzäcker oder Wiesen ins Revier fallen, und in diesem Falle ob ein Arrondissement der Grenze möglich zu machen sey.

2) Ob das Revier eben oder bergigt sey, ob die Unebenheiten auf die Bewirthschaftung Einfluß haben können. Ob das Revier mit vielen und breiten Wegen zum Nachtheil desselben durchschnitten, und ob dem abgeholfen werden könne.

3) Wie der Boden beschaffen sey, und zu welche Holzart er sich besonders qualificire.

4) Mit welchen Holzarten das Revier beständen sey, und welche davon dominirend sind.

5) Ob das Revier mit allen dem Alter nach folgenden Classen beständen sey, oder ob eine oder die andere Classe ganz fehle, oder ob eine oder die andere besonders stark gegen die andere angetroffen werde.

6) Ob die Classen geschlossen stehen, besonders die jüngern, und ob viel altes Holz in den jüngern verwachsen sey. Ob das alte Holz in den jungen Classen ohne Nachtheil stehen bleiben könne, oder ob es mit wenigerm Nachtheile herausgenommen werden könne. Oder ob es bei Laubhölzern wohl zweckmäßig sey, nach einer Reihe von Jahren das ganze Revier abzuholzen, und zu Schlagholz anzuziehen.

§. 109.

Sind alle diese und ähnliche Sachen, den Localumständen nach genau in Erwägung gezogen, und das Protokoll davon gehörig angefertigt worden, so geht man zur speciellen Besichtigung über, bei welcher man bei jedem Theile auf folgende Gegenstände sein Augenmerk richten und alle Bemerkungen darüber zu Proto-

kolle bringen muß. In diesem Protokolle bemerkt man

1) Die Ordnung in welcher man die Schläge oder Jagen nach und nach durchgegangen ist, und dieselben besichtigt hat.

2) Bestimmt man genauer, welche Holzart in jedem Theile prädominire, ob er rein oder mit andern Holzarten melirt bestanden sey, oder ob der Bestand der haubaren Classen mit den jüngern Classen sehr durchschnitten ist.

3) Ob das Revier im haubaren Bestande geschlossen nnd gut bestanden, oder ob es sehr ausgelichtet und schlecht bestanden sey.

4) Ob der schlechte Bestand vom schlechten Boden, oder von vormaliger schlechten Bewirthschaftung herrühre. Letzteres zeigt sich entweder durch Erkundigung welche man von alten der Gegend kundigen Leuten einzieht, oder aus dem Wachsthum der vorhandenen Stämme, oder auch aus der Menge vorgefundener Stubben, welche von schlechter Wirthschaft zeugen, oder durch Merkmale von ehemaligem Windbruche oder andern Unglücksfällen, welche das Revier betroffen haben können.

5) Ob auf natürliche Besamung zu rechnen oder ob man zur künstlicher Besamung schreiten müsse.

6) Ob eine Abschätzung nach Probemorgen möglich ist, oder ob man sich zum Auszählen entschließen müsse.

7) In welchem Alter man die Holzart als haubar annehmen kann. Dies erfährt man durch die Jahrringe, nemlich man schneidet einen Baum ganz unten so tief wie möglich ab, schneidet hierauf von dem Stamme einen Theil von etlichen Fuß lang ab, und diesen schneidet man schrähe durch, läßt die mittlere Fläche glatt abhobeln, und zählt sodann die Jahrsringe, zu welchen hierdurch gefundnen Jahren man noch so viel Jahre hinzurechnen muß, als nach der Erfahrung erfordert werde, daß der Baum zu der Höhe wachse bis zu dem Punkte in welchem er abgeschnitten worden.

Wenn man dies mit einigen Bäumen thut, und deren Inhalt berechnet, so zeigt sich durch diese Vergleichung das Alter, in welchem man am zweckmäßigsten das Holz fällen müsse.

8) Wenn man nun in den ältern Holzarten das Alter der Haubarkeit bestimmt hat, und von diesem das Alter der folgenden jüngern Classe abzieht, so zeigt sich, wie lange man noch in der haubaren Classe holzen müsse, wenn die jüngere Classe nicht zu früh am Hau kommen soll. Hat man nun das Alter der haubaren Classe gleichfalls bestimmt, so kann man leicht übersehn, ob man in derselben noch so lange wirthschaften könne oder nicht.

9) Findet sich nun die erste Classe schon so alt, daß sie bis zum Antritt der jüngern Classe nicht gehalten werden kann, so kömmt zu untersuchen, ob es vortheilhafter sey, das Holz in einer Anzahl Jahre, dem Alter angemessen, hintereinander abzuholzen, und ob ein Stillstand in der

Holzung zuzulassen den Localumständen nach angeht, oder ob dies die Umstände nicht zulassen, und ob der Schade welcher durch Abstehen des Holzes entsteht, vielleicht durch andere Nutzung der Casse ersetzt werde. So kann dies z. E. bei Eichen- und Büchen-Revieren durch die Mastnutzung geschehen. Hierbei muß Taxator noch anmerken, ob es nicht den Umständen angemessen sey, die 1ste Classe mit der 2ten zusammenzuwerfen, und in beiden zusammen so lange zu wirthschaften, bis die 3te Classe eintreten kann.

10) Der Hauptmangel, welcher dem Forstmanne am mehrsten Sorge macht, ist das Bauholz, weil das Brennholz immer noch durch andere Mittel auf diese oder jene Art sich ersetzen läßt, das Bauholz aber durchaus nicht zu ersetzen ist. Es ist daher ein Hauptaugenmerk des Taxators, die Bedürfnisse, welche in dieser Art von dem Reviere zu bestreiten sind, genau zu erfahren, und nach Möglichkeit dahin zu sehen, dieselben zu bestreiten. Er muß dieserhalb das Bauholz möglichst zu konserviren suchen, und da wo großer Mangel an Bauholz ist, die Zeit genau angeben, wie lange man dasselbe konserviren könne.

11) In Absicht der Laubholz-Reviere muß man nach Localität untersuchen, ob es zweckmäßig sey, sie als Baumholz oder als Schlagholz, oder als Ober- und Unterholz zugleich zu nutzen. Im Falle das Revier als Schlagholz zu benutzen ist, so müssen wieder die Localität und die Bedürfnisse der Gegend die Anzahl Jahre angeben, in welchen man den Umtrieb annehmen müsse. Hiervon

wird bei Gelegenheit des Turnus ein mehreres erwähnt werden.

Am vorzüglichsten scheint es, das Revier als Ober- und Unterholz zugleich zu bewirthschaften: denn erstlich kann man in dem darin befindlichen Oberholz auf eine größere Nutzholzbenutzung rechnen, sodann aber geben auch die Stämme den jung ausschlagenden Lohden einen Schatten, so daß sie nicht so sehr von der Sonne leiden können, auch kann das Erdreich nicht so sehr ausdürren, welches gleichfalls den Wachsthum sehr befördert.

12) Eben so muß der Taxator den Boden der Räumden und Blößen genau untersuchen, und daher bestimmen, zu welchem Holzanbau man dieselben am besten anschlagen müsse, so wie denn weiter unten gezeigt werden wird, nach welchen Grundsätzen man dieselben wieder in Anbau bringen müsse.

13) Endlich muß der Taxator aus dem Alter der haubaren Classe und aus ihrem guten und schlechten Wachsthum, so wie aus ihrem geschlossenen oder ausgelichteten Bestande den Nachwuchs bestimmen, welchen man beim Haue in Rechnung bringen kann.

14) Von den jüngern Classen muß der Taxator angeben, ob sie rein und geschlossen bestanden, oder ob sie melirt sind, und mit welchen Holzarten. Ferner ob sich in dem haubaren Holze Probemorgen zum Abschätzen der jüngern Classen vorfinden, wo nicht nach welchen von den angegebenen

Maßstäben, als gut, mittelmäßig und schlecht, die Abschätzung vorgenommen werden müsse.

15) Die ältere Classe darf aber nie nach diesen zu Probemorgen angegebenen Maßstäben abgeschätzt werden, sondern Taxator muß die dem Alter nach besonders abweichende Bestände herausmessen lassen, und in jeden dieser Distrikte einem besondern Probemorgen nach den wahrem Bestande desselben annehmen. Hierdurch erhält nicht nur der Taxator mehrere Freiheit und Ungebundenheit, und kann sich dem wahren Bestande mit mehrerer Gewißheit nähern, das Departement kann aber auch bei dieser Bestimmung den Hau mit mehrerer Gewißheit dirigiren.

16) Endlich muß Taxator nicht zu bemerken vergessen, ob das Revier durch die Hütungs-Interessen in Absicht der Schonungen sehr eingeschränkt sey, und wieviel man jederzeit in Schonung bringen könne.

17) So zweckmäßig und gut auch mancher von den Vorschlägen an sich seyn kann, welchen man zur Verbesserung dieses oder jenes Fehlers angeben kann, so kommen dennoch in den meisten Fällen die Hütungs-Gerechtigkeiten mit dergleichen Vorschlägen so sehr in Collision, daß es in den mehrsten Fällen sehr schwer wird, und nicht wenig Erfahrung erfordert, um nach der jedesmaligen Lokalität die zweckmäßigsten und den Umständen angemessensten Verbesserungs-Vorschläge anzugeben, dies bleibt daher für den Taxator ein sehr wichtiger Gegenstand, auf welchen er allen Fleiß zu verwenden nöthig hat, um alle die concuri-

rende Umstände zu dem nothwendigen Zwecke zu vereinigen.

§. 110.

Ist auf diese Art das Revier speciel besichtigt, so schreitet man zur speciellen Abschätzung selbst, welche auf folgende Art betrieben wird.

1. Bestimmt der Taxator nach den Umständen, wenn das Revier in Schlägen eingetheilt ist, ob mehrere Schläge und welche man zusammen abschätzen könne.

2. Bestimmt die Distrikte welche er dem Alter und Bestande nach gleich annehmen kann, läßt sie von dem Conducteur herausmessen, in die Brouillon-Karte eintragen, und nach ihren Flächeninhalte berechnen.

3. Während der Conducteur sich hiermit beschäftigt, wählt der Taxator im haubaren Holze die Probe-Distrikte, schätzt diese auf dem Stamme so genau wie möglich ab, läßt sodann von dem Conducteur den Inhalt der Fläche berechnen, und bestimmt darnach die Probemorgen. Je größer der Probe-Distrikt ist, je genauer wird der Probemorgen ausfallen. Es will dies also nicht sagen, daß Taxator zum Probe-Distrikte genau einen Morgen müsse abstecken lassen; auch ist Taxator nicht gebunden, diesen Distrikt ganz zusammenhängend zu wählen, sondern es bleibt seiner Beurtheilung überlassen, ob er es nicht zweckmäßiger finden sollte, mehrere kleinere Distrikte zu erwählen, und aus ihnen den Probemorgen zu bestimmen.

Auf diesen Probemorgen muß Taxator zugleich bestimmen, wie viel an Bauholz darauf zu rechnen sey, jedoch muß dies mit möglichster Vorsicht geschehen.

4. Steht das Revier in der ersten Classe nicht geschlossen, so ist die Abschätzung nach Probemorgen nicht anzuwenden; in diesem Falle muß der Taxator sich zum Auszählen der Stämme entschließen. Steht die Classe aber gut geschlossen, so muß Taxator in jedem merklich dem Alter und Bestande nach von einander abweichenden Distrikten, die Probemorgen, auf vorbeschriebene Art bestimmen.

5. Diese Probemorgen kann Taxator, wenn er es den Umständen angemessen findet, zugleich für die jüngern Classen anwenden, wenn dies aber nicht seyn kann, so bestimmt er, welchen von den vorschriftsmäßigen zum Maßstab angegebenen Probemorgen er für die jüngere Classen annehmen müsse. Nimmt Taxator einen Probemorgen 1ster Classe zur Abschätzung der jüngern Classen, so kann das darauf angegebene Bauholz bei der jüngern Classe nicht angenommen werden, sondern man berechnet den Bestand summarisch, und nimmt verhältnißmäßiges Bauholz an, wenn diese Classe zum Hau kömmt, welcher sich sodann nach dem guten oder schlechten Wachsthum bestimmen läßt.

6. Dann bestimmt Taxator in jedem besondern Distrikte das Alter der Haubarkeit der darin befindlichen Holzarten. So kann z. E. der Taxator durch Versuche im Allgemeinen bei specieller Be-

sichtigung des Reviers gefunden haben, daß 100 Jahr das beste haubare Alter der Kiehnen sey; er findet aber Kiehnen im Distrikte, welche den Umständen nach zu Schlagholz bestimmt, und in 40 Jahren abgetrieben werden müssen, so kann es dem Taxator zweckmäßig scheinen, die Kiehnen beim 2ten Abtriebe, also in einem Alter von 80 Jahren zu holzen, weil in solchen Fällen von den Kiehnen wegen ihren weitläuftigen Stand auf kein Bauholz zu rechnen ist, in dergleichen Fällen in dem Distrikte auch weiter auf keinen Kiehnenanbau gesehn werden dürfte.

7. Bestimmt Taxator von jedem besonders herausgemessenen Distrikte die Güte des Bodens, und die Holzart zu welcher er sich zum Anbau in der Folge am besten qualificiere, und giebt zugleich die Gründe an, welche ihm zu diesen oder jenen Vorschlag vermogt haben.

8. Eben dies thut Taxator mit den Räumden und Blössen.

9. Endlich kann Taxator durch Versuche für jede besondere Holzart das Nachwuchs-Verhältniß im Allgemeinen bestimmt haben, er findet aber bei der speciellen Abschätzung in irgend einem Distrikte, entweder wegen des schon besonders hohen Alters der Bäume, oder des vorzüglich schlechten oder guten Wachsthums, eine Abweichung nöthig, so muß dies Taxator gleichfalls in jeden dieser Fälle genau anmerken.

§. 111.

Hat Taxator bei der speciellen Besichtigung nöthig gefunden, die 1ste Classe mit der 2ten zusammen

zu werfen, so muß derselbe nun auch diese 2te Classe eben so wie die erste behandeln, und nach ihrem wahrem Bestande abschätzen, zugleich aber auch mit dem Nachwuchs-Verhältnisse auf diese jüngere Classe und daherigem noch stärkern Wachsthum derselbe Rücksicht nehmen.

Diese Bemerkungen des Taxators, verbunden mit dem Inhalte, welchen der Conducteur während der Zeit von jedem einzelnen Distrikte berechnet hat, dienen zur Anfertigung der Tabelle der speciellen Nachweisung, dieserhalb ist es nothwendig, daß Taxator ein Register führe, in welchem der gegangenen Tour nach, Abtheilung für Abtheilung nach ihrem Flächeninhalt, Nummer der Schläge oder Jagen, worin sie liegen, mit allen den oben angeführten Bemerkungen, Angaben und Vorschlägen mit den Gründen, welche ihm der Localität nach zu denselben bewogen, genau angiebt. Folgende Beispiele mögen dies näher erläutern.

§. 112.

Z. E. im Blocke A im Kiehnenholze.

Schläge No. 1 und 2.

Abtheilung No. 1.

15 Morgen 117 □R. Ist mit Kiehnen 3ter Classe bestanden, welche 18 Jahr alt sind, sie stehn in gutem Wachsthum, ziemlich geschlossen.

Der Ertrag wird seyn

18jährige Kiehnen in einem Alter von 120 Jahren à Morgen 40 Klafter.

Abtheilung No. 2.

20 Morgen 15 □R. Hat ihren guten natürlichen Auflug ihrer vortheilhaften Lage zu verdanken, denn sie liegt mitten zwischen hohem Holze.

Der Ertrag wird seyn

8jährige Kiehnen in einem Alter von 120 Jahren à Morgen 40 Klafter.

Abtheilung No. 3.

15 Morgen 73 □R. Hier sind Kiehnen 3ter Classe prädominirend, mit altem Holze vermischt. Das alte Holz kann vorsichtig herausgeplántert werden, da es sich in der jüngern Classe plätzig befindet; von dem jüngern Holze wird der Ertrag seyn

22jährige Kiehnen in 120jährige Alter à Morgen 20 Klafter.

Das alte Holz so darin befindlich, ist 80 Jahr alt, und durchs Auszählen auf 62¼ Klafter gefunden, auch befindet sich darin eine alte Eiche, welche schon zopftrocken, und 1¼ Klafter Inhalt hat.

Abtheilung No. 4.

12 Morgen 155 □R. Ist vor ein paar Jahren mit Kiehnen-Saamen besäet, wovon sich der Anflug sehr sparsam zeigt, und so unbedeutend anfindet, daß man sie daher als Blöße angenommen hat. Der Boden besteht aus Sand und weniger Damm-Erde.

§. 113.

Desgleichen im Birkenschlagholze Block B.

Schläge No. 1 und 2.

Abtheilung No. 1.

16 Morgen 120 □R. Dieser Bestand ist ein Gemische von Birken, Eichen und Kiehnen, jedoch sind Birken erster Classe prädominirend. Um den dazwischen stehenden Eichen Luft zu verschaffen, und von demselben wieder den Stammausschlag zu benutzen, würden die Birken in 14 Jahren zu hauen, alsdenn können zugleich die anständigsten Eichen mit herausgehauen werden. Die Kiehnen können sodann im 3ten Abtriebe mitgeholzt werden, in einem Alter von 90 Jahren, die Eichen müssen aber, da sie guten Wachsthum zeigen, bis zu ihrem 200jährigen Alter stehen bleiben.

Der Ertrag würde seyn

16jährige Birken im 30jährigen	Alter	à	Morg.	4	Klaft.
— Eichen im 200	—	—	à	—	14	—
— Kiehnen im 90	—	—	à	—	6	—

Die hierin befindliche Luderstelle, taugt zu keinem Holzanbau, weil sich stehendes Wasser darin sammelt, welches keinen Abfluß hat. Am Rande desselben könnte man Setzweiden pflanzen.

Abtheilung No. 2.

20 Morgen 17 □R. Die hierin stehende Kiehnen 1ter Classe sind gar nicht mehr geschlossen, und ist der Bestand eben hinreichend eine gute natürliche Schonung zu erziehn, daher sie sobald es die Umstände erlauben, in Schonung zu legen wäre.

Der Boden dieser Räumde ist nur sehr mittelmäßig, sollte daher bei der künftigen Anlage eine

Nachbesserung nöthig seyn, so würde sie am besten durch Birkensaamen geschehn können. Die Kiehnen sind stückweise ausgezählt worden, und 70 Jahr alt gefunden.

Der Ertrag der Kiehnen beträgt nach der Auszählung auf 227½ Klafter
150jährige Eichen 103½ —

Abtheilung No. 3.

5 Morgen 43 □R. Ist mit einstämmigen haubaren Birken und Elsen bestanden, die noch einen guten Stammausschlag erwarten lassen.

Der Ertrag wird seyn

25jährige Birken à Morgen 4 Klafter
25jährige Elsen — — 1 —

§. 114.

Desgleichen im Büchenbaumholze Block C.

Schläge No. 1—2.

Abtheilung No. 1.

36 Morgen 60 □R. Hier sieht man an dem unter dem Maule des Viehes erwachsenen Aufschlage, wie leicht es bei einem pfleglich erzogenen und geschlossenen Buchenwalde ist, Saamenloden zu erziehn. Wäre von Seiten des Forstwirths nicht verabsäumt in der ersten Jugend dieses Aufschlages das Oberholz sämmtlich herauszuhauen, so daß der zugeschlossene Stand des Oberholzes den Aufschlag nicht unterdrücken, auch durch Herausnahme nicht schaden könnte, so würde der Ertrag höher seyn können, so aber kann man nur als Ertrag annehmen

15jährige Rothbüchen in 150jährigen Alter
à Morgen 27 Klafter.

Das Oberholz ist sehr hochstämmig und schäftig erwachsen, daß man Bäume von 70 bis 75 Fuß Höhe gemessen hat.

Es kann davon noch 82 Klafter Eichen inclusive 22 Klafter Nutzholz und 300 Klafter Rothbüchen, wovon $\frac{1}{8}$ Nutzholz zu rechnen, gehauen werden.

Abtheilung No. 2.

15 Morg. 166 □R. Ist mit alten überständigeu Elsen bestanden, die nicht mehr vom Stamme auszuschlagen versprechen, weil die Wurzelstacken anbrüchig sind. Diese Abtheilung qualificirt sich zum Anbau mit Pappel- und Weiden-Setzstangen.

Nach der Auszählung ist gefunden.

Abtheilung No. 3.

37 Morgen 132 □R. Ist eine Räumde mit 250jährigen Eichen 225jährigen Rothbüchen und 125jährigen Hainbüchen bestanden. Die Rothbüchen sind nicht schäftig erwachsen, daher auf kein Nutzholz zu rechnen ist.

Der Ertrag ist

250jährige	Eichen	378 Klafter
225 —	Rothbüchen	294 —
125 —	Weißbüchen	256 —

Abtheilung No. 4.

30 Morg. 2 □R. Ist mit Rothbüchen 3ter Classe bestanden, welche uuter dem Maule des Viehes

erwachsen sind. Diese seltne Erscheinung machte Taxatnr aufmerksam, dem Grunde derselben nachzuspüren, wo sich denn fand, daß die Hütungsinteressenten diesen Theil für die Zuchtochsen im Vorsommer schonten, damit sie bei der schärfsten Arbeit hinlänglich Futter fandeu. Da nun zu dieser Zeit die Lehden schon ziemlich holzig sind, und es an Futter nicht fehlt, so sind die Lohden vom Viehe verschont geblieben.

Der Ertrag wird seyn

18jährige Rothbüchen im 150jährigen Alter
à Morg. 27 Klafter.

Das Alter der darin stehenden alten Bäume ist, Eichen von 200 Jahr, Rothbüchen 180 Jahr, davon kann noch herausgenommen werden:

44 Klafter Eichen, incl. 24 Klafter Nutzholz, 23 Klafter Rothbüchen, wovon $\frac{1}{3}$ Nutzholz zu rechnen.

§. 115.

Im Haseln Schlagholze, Block D.

Schläge No. 1—2

Abtheilung No. 1.

Ist mit 3jährigen Haseln bestanden, welche mit gleich alten Birken melirt sind. Der Ertrag ist wie folget angenommen.

a. Oberholz.

Rothbüchen Laßreiser

25 Jahr alt in einem Alter von 125 Jahren 6 Klafter
3jährige Birken — — 40 — 1 —

b. Unter-

b. Unterholz.

Haseln 3 Jahr alt, in einem Alter von 20 Jahren.

Tienenbandstücke	4 Fuder oder	1 Klafter Nutzholz
Tannenbandstöcke	24 — —	3 — — —
Zaunstrauch	2 Fuder oder	1 — — —
Brennstrauch	2 — —	1 Klafter Brennholz.

Abtheilung No. 2.

Ist ebenfalls mit 3jährigen Haseln bestanden, welche mit Laßreiser von Weißbuchen, gepflanzten Espen und ausgesäeten Birken melirt sind.

Der Ertrag würde seyn

a. Oberholz.

3jährige Birken in einem Alter von 40 Jahren
à Morg. 2 Klafter.

10jährige gepflanzte Espen in einem Alter von 40 J.
à Morg. 1 Klafter.

18jährige Hainbuchen in einem Alter von 90 Jahren
à Morg. 3 Klafter.

b. Unterholz.

Der Ertrag der Haseln ist nach No. 1 zu berechnen.

Abtheilung No. 3.

Ist im vorigem Jahre mit Birken angesäet, da sich nun noch nicht beurtheilen läßt, wie diese Anlage gerathen wird, so ist nichts davon in Rechnung zu bringen.

Oberholz.

16jährige Hainbuchen in einem Alter von 90 Jahren
à Morg. 1 Klafter.

§. 116.

Diese Beispiele werden hinreichend seyn, zu ersehen, wie mit Beobachtung der zum Augenmerk angegebenen Punkte, die Taxations-Protokolle geführt werden müssen, wenn man daraus mit Sicherheit die specielle Nachweisung anfertigen will, und dem Departement die Mittel gegeben werden sollen, die Taxation genau beurtheilen zu können.

Um das Auszählen des Holzes mit Ordnung und übersichtbar verrichten zu können, kann man eine Tabelle folgender Art einrichten.

No. des Schlages	Abtheilung u. Flächen-Inhalt derselben.	Ist bestanden mit	Holzart.	Stück.	Brennholz (Klafter)	Nutzholz (Klafter)	Summa Brennholz (Klafter)	Summa Nutzholz (Klafter)	Bauholz Stark (Stücke)	Bauholz Mittel (Stücke)	Bauholz Klein (Stücke)	Bauholz Sageblöcke (Stücke)	Bauholz Bohlstämme (Stücke)	Bauholz Lattstämme (Stücke)	Haupt-Summe Klafter	Haupt-Summe Bäume	Transport Klafter	Transport Bäume
4 u. 5	1.	Räumde	Eichen	4	$5\frac{1}{4}$	—	21	—										
	18 Morg.			2	$5\frac{1}{2}$	—	11	—										
	120□R.			16	5	—	80	—										
				45	4	—	180	—										
				14	2	1	28	14										
				5	$1\frac{1}{2}$	1	$7\frac{1}{2}$	5										
				40	3	$\frac{1}{2}$	120	20										
				4	$1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	6	14	—	—	—	4	—	—				
				130	—	—	$516\frac{1}{2}$	53	—	—	—	4	—	—	$569\frac{1}{2}$	130		
			Rothbüchen	15	3	—	45	—										
				21	$2\frac{1}{2}$	—	$52\frac{1}{2}$	—										
				7	2	—	14	—										
				43	—	—	$111\frac{1}{2}$	—	—	—	—	—	—	—	$111\frac{1}{2}$	43		
			Weißbüchen	10	$\frac{3}{4}$	—	$7\frac{1}{2}$	—										
				15	$\frac{1}{2}$	—	$7\frac{1}{2}$	—										
				25	—	—	15	—	—	—	—	—	—	—	15	25		
														Summa	696	198	696	198
																Latus	696	198

Dieser Tabelle giebt man ein Titelblatt, worauf man den Block des Reviers schreibt, von dem die Schläge und Abtheilungen sind, wovon in der Tabelle die Rede ist.

§. 117.

Diese Tabelle soll übrigens nur einen ohngefehren Leitfaden geben, wie man dies Geschäft mit Ordnung verrichten könne, und kann ein jeder Taxator den bei seinem Geschäfte obwaltenden Umständen gemäß, noch Rubriquen hinzusetzen, wenn er es der Deutlichkeit wegen nothwendig findet.

So könnte es Taxator nothwendig finden, das Nutzholz genau zu specificiren, welches in vorstehender Tabelle summarisch eingetragen ist, welches er am leichtesten durch einige Rubriquen erreichen kann. Eben so kann er noch als Anmerkung nöthig finden das Alter des Holzes, oder die Jahre in welchen sie geholzt werden müssen, anzumerken. Diese und ähnliche Umstände wird ein geschickter Taxator leicht durch einige hinzugesetzte Rubriquen in der Tabelle anzumerken Gelegenheit finden.

§. 118.

Aus den Taxations-Protokollen und Auszählungs-Tabellen wird die Specialnachweisung, wie die Tabellen No. 1, No. 2, No. 3 und No. 4 zeigen, auf folgende Art angefertigt.

Schläge No. 1 — 2, Abtheilung No. 1 sind 15 Morgen 117□R. mit Kiehnen 3ter Classe bestan-

den, welche 18 Jahr alt sind, und wovon der zu erwartende Ertrag pro Morgen auf 40 Klafter angegeben sind. Man trägt daher in der 2ten Colonne unter Inhalt der Schläge 64 Morgen, unter 3ter Classe die angegebenen 15 Morgen 117□R.; unter ist bestanden pro Morgen, 40 Klafter, und unter Alter des Holzes, 18 Jahre. Hierauf multiplicirt man die 15 Morgen 117□R. mit 40 Klafter als Bestand des Probemorgen, und das entstehende Produkt 626 Klafter trägt man unter die besser hinten befindliche Colonne 3ter Classe.

Abtheilung No. 2 ist mit 8jährigen Kiehnen bestanden, welche pro Morgen 40 Klafter erwarten lassen. Man trägt daher unter 4ter Classe die 20 Morgen 15□R., Alter und Probemorgen, wie oben ein, berechnet den zu erwartenden Ertrag wie oben, und trägt ihn unter die 4te Classe gehörig ein.

Abtheilung No. 3 ist mit 3ter Classe prädominirend bestanden, und ist darin altes Holz 1ster Classe melirt. Man trägt daher den Inhalt der Abtheilung als 15 Morgen 73□R. unter der dominirenden 3ten Classe, berechnet den Ertrag wie oben und trägt denselben, so wie Probemorgen und Alte gehörig ein. Den Betrag des alten ausgezählten Holzes so wie die alte Eiche, trägt man jedes unter die zustimmende Classe ein, ohne davon das Alter anzugeben.

Hierbei ist zu bemerken, daß man jederzeit bei melirten Abtheilungen so verfahren, und den Inhalt unter der dominirenden Classe eintragen müsse, denn es würde sehr fehlerhaft seyn, wenn Taxator sich das alte Holz als auf einem Plaze zusammenstehend denken, und darnach den Raum so wie den Bestand pro Morgen

angeben wollte. Dies würde das Departement bei Ansicht der Tabelle in den Irthum setzen als stände das Holz wirklich auf einem Plaze zusammen, und würde es veranlassen oft ohne Verschulden ganz unzweckmäßige Befehle in Ansehung der Holzung des Reviers zu ertheilen. Steht aber der Bestand, ohne angegebenen Raum des Bodens in der Tabelle, so sieht man gleich, daß es unter der dominirenden zerstreut melirt steht, und es kann nach Beschaffenheit der dominirenden Holzart mit Zuziehung der Bemerkungen des Taxators, von Seiten der Direktion richtig die Abholzung dieser melirt stehenden alten Hölzer bestimmt werden.

Abtheilung No. 4 ist als Blöße angegeben, es wird daher der Inhalt dieser Abtheilung auch unter Räumden und Blößen eingetragen, und zeichnet sich als Blöße dadurch aus, daß von derselben weder Alter des Holzes noch Bestand ausgeworfen ist, welches von dem auf den Räumden stehenden alten Holze jederzeit geschehen muß, wie dies bei den Schlägen No. 3, 4, 5 und 6 mit den 17 Morgen 144 □R. geschehn ist.

§. 119.

In dem Blocke B im Birkenschlagholze ist Abtheilung No. 1, 16 Morgen 120 □R. sehr melirt mit Birken 1ster Classe, Eichen 3ter Classe und Kiehnen 3ter Classe bestanden. Davon Taxator die Birken prädominirend angesprochen, und den Probemorgen angegeben.

16jährige	Birken	im	30jährigen	Alter	à M.	4	Klaft.
—	Eichen	—	200	—	—	14	—
—	Kiehnen	—	80	—	—	6	—

Man trägt daher die 16 Morg. 120 □R. unter Birken 1ster Classe ein, unter Probemorgen trägt man 4, 14 und 6 Klafter untereinander, und berechnet sodann den Inhalt wie oben, und trägt die Bestände unter die gehörige Holzart und Classen ein.

Im Blocke C Schläge No. 1 und 2, Abtheilung No. 2 sind 15 Morg. 166 □R. mit alten überständigen Eichen bestanden, welche nach der Auszählung 165 Klafter betragen. Da es die Tabelle unnöthig erweitern würde, wenn man vorne, so wie von der dominirenden Holzart, von jeder Holzart noch Rubriquen für den Flächeninhalt angeben wollte, so trägt man die 15 Morg. 166 □R. unter 1ste Classe der dominirenden Holzart, oder in andern Fällen dahin, wo sie dem Alter nach hingehören. Um nun zu zeigen, wieviel von dem in der untern Summe angegebenen Raume mit fremden Holzarten bestanden sey, so kann man unter der Summe noch bemerken: hierunter ist, und sodann mit der Benennung der Holzart, zugleich die Morgenzahl angeben, welche in jede Classe der dominirenden Holzart sich vorfindet. Dieses ist mit den 15 Morgen 166 □R. in der Tabelle No. 3 geschehn.

Die Tabelle No. 4 vom Blocke *D* bedarf keiner nähern Erläuterung, wer die angegebenen Abtheilungen der Schläge No. 1 und 2 aus dem Taxations-Protokolle mit der Tabelle vergleicht, und dabei die oben gegebenen Regeln vor Augen hat, dem wird in der Tabelle nichts unverständlich bleiben.

§. 120.

In Absicht des Bauholzes im Kiehnenblocke Tabelle 1 ist noch zu bemerken. Findet sich die 1ste Classe

so geschlossen, daß sie nach Probemorgen abgeschätzt werden kann, so giebt Taxator zugleich auch an, wie viel Bauholz pro Morgen gerechnet werden kann, und dies wird in die gehörigen Rubriquen unter: auf dem Probemorgen, eingetragen, sodann aber eine jede angegebene Art mit der Morgenzahl der Abtheilung multiplicirt, und hierauf unter die daneben stehenden Rubriquen: giebt, gehörig eingetragen. Endlich wird nach dem oben angegebenen Inhalt eines jeden Stückes Bauholzes, die Klafterzahl berechnet, und in der Rubrique: beträgt zu Klafter, summarisch ausgeworfen.

Dieses ist mit den 105 Morg. 36 □R., Abtheilung No. 1 der Schläge 29 bis 35 geschehn.

Ist aber das alte Holz, mithin auch das Bauholz, summarisch ausgezählt, so wird es auch sogleich in der Colonne: giebt, summarisch eingetragen, und der Bestand an Klaftern berechnet und ausgeworfen. So ist dies mit Abtheilung No. 1 der Schläge 3—6 geschehn.

Ist alles Holz, den Taxations-Protokollen gemäß, in die speciellen Tabellen, nach vorbeschriebener Art gehörig eingetragen, so werden von allen Colonnen die Summen gezogen. Um nun der Tabelle mehr Uebersicht zu geben, bemerkt Taxator, nach einem mittlern Durchschnitte der im Protokolle angegebenen Bemerkungen, wie viel von einer jeden Holzart als Nutzholz anzunehmen ist, in wie viel Jahren eine jede im Revier befindliche Holzart abgeholzt werden müsse, und kann auch noch angeben, ob und wie viel Nachwuchs man von den haubaren Classen annehmen könne. Diese Bemerkungen dienen zur Erleichterung der Ueber-

sicht, und müssen sich genau auf die Taxations-Protokolle beziehn, so daß nicht nur das Departement, sondern ein jeder Revisor die Gründe zu den Angaben in den Protokollen vorfinden, und sich von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit der Angaben überzeugen kann.

§. 121.

Die Jahre, in welche jede Holzart abgeholzt werden muß, oder der Turnus richtet sich einmal nach dem Wachsthume der Holzart, andern theils nach den zu befriedigenden Landesbedürfnissen, und der Localität eines jeden Reviers. Es ist also nicht allgemein zu bestimmen, daß durchaus in dieser Holzart der Turnus so, in einer andern so angenommen werden müsse, sondern man muß beide Augenmerke geschickt mit einander zu vereinigen suchen.

Um die Jahre der Haubarkeit zu bestimmen, stämmet man einige gesunde Bäume ab, welche ihren vollen Wachsthum haben, untersucht die Anzahl Jahre ihres Alters nach den Jahrringeu, berechnet ihren Cubikinhalt, und nun sucht man durch Vergleichung des Alters und des Inhaltes, das Alter zu finden, in welchem der Baum seinen vorzüglichsten Wachsthum beendigt hat, und dies gefundene Alter würde nun für dies Revier den Turnus angeben, wenn die nachfolgende Betrachtung] der Landesbedürfnisse keine Aenderung verlangten.

Ist nun auf diese Art der Turnus z. E. eines Kiehnenreviers auf 120 Jahre gefunden, so müssen in diesem noch zur bessern Uebersicht und Regulirung

des Haues Unterabtheilungen gemacht werden. In diesen Abtheilungen macht die haubare Classe die erste, und wird durch das Alter bestimmt, in welchem die Holzart anfängt bedeutendes Nutzholz zu geben; dies ist bei den Kiehnen das 70ste Jahr, weil in diesem Alter ein Kiehnbaum klein Bauholz geben kann. Die erste Classe im Kiehnen, oder haubar wird also von über 70 Jahr gerechnet. Es versteht sich aber von selbst, daß nur völlig ausgewachsene Bäume geholzt werden dürfen, wenn man den höchsten Ertrag des Reviers beabsichtigt: Es muß daher das jährliche Abholzungs-Quantum in dieser Classe so gewählt werden, daß der Hau jederzeit die ältesten Bäume trift, daher es denn auch eine sehr weise Verordnung ist, bei der Abschätzung die Distrikte in der haubaren Classe so zu nehmen, wie sie sich dem Alter nach besonders distinguiren.

Die letzte Abtheilung oder Classe bestimmt sich durch die Jahre, welche die Holzart von ihrem Anbaue an nöthig hat, um dem Viehfraße zu entwachsen, während welcher Zeit es in Schonung liegen muß. Diese Jahre müssen mit Behutsamkeit nach dem schwächern und stärkern Wachsthume einer jeden Holzart gewählt werden, denn da das Vieh eigentlich nur die jungen zarten Sprößlinge und Knospen frißt, in diesen aber sich der Wachsthum der Pflanzen befindet, welcher nicht anders, als durch die Augen und Knospen fortgesetzt werden kann, so folgt, daß eine zu früh aufgegebene Schonung nothwendig eingehen müsse, oder wenigstens nur einen sehr krüpplichten Wuchs erhalten könne. Dies ist bei den Holzarten am nachtheiligsten, welche blos durch Knospen ihren Wachsthum fortsetzen, als die Nadelhölzer. Die jüngste Classe eines Kiehnen-Reviers ist hiernach unter 15 Jahr angesetzt.

Nach diesen Angaben würden sich also im Baumholze natürlich 3 Classen ergeben, als 1ste Classe von Anfang der besondern Nutzbarkeit bis zum beendigten besten Wachsthume. 2te Classe von der Zeit, wo die Schonung aufgegeben worden, bis dahin wo die Nutzbarkeit anfängt, und 3te Classe Schonzeit. Diese drei Classen findet man auch in allen Laubholz-Revieren, welche zu Baumholz benutzt werden sollen. Bei den Kiehnen-Revieren, wo diese mittlere Classe von 15 bis 70 Jahren fällt, würde das älteste Holz derselben zwar fällig ausgewachsen, das jüngste aber erst 65 Jahr alt seyn, und sich noch nicht völlig zur 1sten Classe qualificiren, man nimmt daher darin eine Classe mehr an, und theilt die mittlere Abtheilung noch in 2 Classen, von welchen die älteste von 40 bis 70 Jahr, die jüngere von 15 bis 40 Jahren ist.

§. 122.

Diese angegebenen Classen geben nun auch die verschiedenen Holzungen an, wie sie einer der andern in der Abholzungs-Periode folgen müssen.

Dieser Turnus leidet jedoch öfters durch die Lokalität einige Abänderungen. Fordern zum Beispiel die Bedürfnisse, welche auf das Revier angewiesen sind, einen besonders starken Brennholzbestand, hingegen nur wenig, oder doch nur schwaches Bauholz, so lassen sich diese Bedürfnisse am nutzbarsten erfüllen, wenn man den Turnus herunter setzt, und denselben auf 100, vielleicht auch nur auf 95 Jahr annimmt, weil das Quantum welches man bei diesem kleinern Turnus in Summa weniger abholzen kann, durch den öfter wiederholten Umtrieb mit Vortheil eingebracht wird

Eben so leidet oft der Turnus durch das unrichtige Verhältniß, in welchem man die Classen antrift, eine Aenderung. Fehlt nemlich in einer Holzart die 2te Classe ganz, oder ist sie nur in geringer Quantität vorhanden, so muß man die 1ste Classe so lange zu erhalten suchen, bis die 3te Classe am Hau kommen kann wo man denn öfters gezwungen ist, den Turnus herunter zu setzen. Dies ist in den mehrsten Eichen und Büchen-Revieren der Fall, daher man mit dieser kostbaren Holzarten in der haubaren Classe so ökonomisch umzugehn gezwnngen ist.

Eben so kann der Fall eintreten, daß die 1ste Classe gegen die 2te und jüngern Classen besonders geringe ausfällt, alsdenn ist man gezwungen die 1ste Classe mit der 2ten zusammen zu werfen, wobei man jedoch nur sehr selten im Stande ist, so lange in beiden zu wirthschaften, als erfordert würde. In diesem Falle werden die jüngern Classen ebenfalls früher zum Hau kommen müssen; wenn man nicht andere Hülfsmittel anwenden kann, und in den mehrsten Fällen wird der Turnus heruntergesetzt werden müssen. Dies ist besonders in den Nadelhölzern der Fall.

§. 123.

Der natürliche Turnus in den Schlaghölzern bestimmt sich gleichfalls durch den Wachsthum der verschiedenen Schlagholzarten. Die Erfahrung lehrt nemlich, daß wenn man die Bäume zu einer Zeit abstämmet, wo sie ihren vorzüglichsten Wachsthum beendigt, jedoch die Rinde unten nach so beschaffen ist, daß man einen Stammausschlag erwarten kann, daß unter dieser Voraussetzung die Stammloden schnell auf-

wachsen, und in diesem schnellen Wuchse so lange fortfahren, bis sie im Summa das Quantum erreicht haben, welches der Baum hatte, als er gefällt wurde, hierauf aber nur noch einen spärlichen Wuchs zeigen. Dieses durch die Erfahrung ausgemittelte Alter, ist sodann die rechte Zeit der Haubarkeit des Schlagholzes. In den Schlaghölzern erhält der Turnus nur zwei Classen, die jüngste ist nemlich die Schonzeit, die erste die Classe der Haubarkeit.

Dieser Turnus leidet aber gleichfalls durch Lokalität und aus dem Reviere zu erfüllende Bedürfnisse häufig Abänderungen. Ist nemlich in dem Reviere kein Holzmangel, und man kann bei der Benutzung des Schlagholz-Reviers auf Nutzholz besonders bedacht seyn, so behält man den natürlichen Turnus bei. Fehlt es aber der Gegend an Brennholz, so kann dieses Bedürfniß auch mit Strauch- und Wasenholz befriedigt werden, und man setzt mit Vortheil den Turnus herunter, weil durch den öftern Umtrieb an Brennholz mehr gewonnen wird, als wenn man die völlige Reife und Haubarkeit abwartet.

Außer diesen angegebenen Augenmerken, welche der Taxator bei zweckmäßiger Bestimmung des Turnus vor Augen haben muß, kommen nun noch die Hindernisse in Erwegung, welche sich bei Anlegung der Schonungen mit den Hütungs-Interessenten in den Weg legen, und welche nur zu oft den Forstmann zwingen anders zu handeln, als er es seiner bessern Ueberzeugung nach zum Nutzen seines Reviers thun würde.

§. 124.

Hiermit sind die Special-Tabellen beendigt, und muß nun aus ihnen die summarische Nachweisung angefertigt werden, welche in folgendem durch die Tabelle No. 5 erläutert werden wird.

Die Colonnen der summarischen Nachweisung sind aus der Tabelle selbst zu ersehen; es müssen darin alle Holzarten enthalten seyn, welche in dem ganzen abgeschätzten Reviere vorkommen.

In diese Tabelle trägt man die Litt. des Blockes, dominirende Holzart, Flächeninhalt desselben, und sodann in den zustimmenden Rubriquen der Holzarten und Klassen, die Summe der Bestände so ein, wie sie in der speciellen Tabelle gefunden worden. Von dieser ersten Reihe zieht man das angegebene Bau- und Nutzholz einer jeden Holzart ab, und die 3te Reihe giebt das Brennholz-Quantum. Nun berechnet man von jeder haubaren Classe, nach den Angaben im Protokolle, oder unter den Special-Tabellen, den beim Haue zu rechnenden Nachwuchs des Brennholzes, addirt diesen gehörigen Orts zu, und die folgende Reihe giebt die Summe des zu erwartenden Brennholzes. Eben dies thut man mit dem Nutzholze, und erhält dadurch das summarische Quantum Nutzholz einer jeden Holzart; dies gilt jedoch nur von dem Nutzholze der Laubhölzer, weil bei den Kiehnen, wie besser unten gezeigt werden wird, der Zuwuchs schon mit eingerechnet ist.

Hierauf bestimmt der Taxator die verschiedenen Holzungs-Perioden, wobei die vorangegebenen Perioden der dominirenden Holzart zum Grunde gelegt

werden, welche sich denn wieder nach den darin melirten Holzarten, und den angegebenen Jahren ihrer Holzung ändern, und in kleinern Abtheilungen abtheilen. Um dies durch Beispiele näher zu erläutern, wollen wir zuförderst die Holzungs-Perioden des Kiehnenblos A genauer betrachten.

Der Turnus der Kiehnen ist auf 120 Jahr angegeben, und die Classen geben zu Holzungs-Perioden 50 Jahr, als von 70 bis 120 Jahren für die Hau-Periode der 1sten Classe; 30 Jahr als von 40 bis 70 Jahr für die 2te Classe, 25 Jahr, als von 15 bis 40 Jahr für die 3te Classe, und 15 Jahr für die 4te Classe.

Diese Periode der haubaren Classe wird des Bauholzes wegen in zwei gleiche Abtheilungen getheilt. Es giebt nemlich gut und gerade gewachsenes Holz von 120 Jahren starkes Bauholz, ein Stück Holz von 70 Jahren klein Bauholz, und die Erfahrung lehrt, daß das kleine Bauholz vom 70sten bis 95 oder 100sten Jahre zu Mittelbauholz, und von 95 oder 100 bis zum 120sten Jahre ein Stück Mittelbauholz zu starkem Bauholze heranwachse. Aus diesem Grunde theilt man die erste Classe in zwei Abtheilungen à 25 Jahre, und legt die Bauholz-Berechnungen in diesen Perioden so an, wie besser unten gezeigt werden wird.

Hieraus entsteht die erste Abholzungs-Periode von 25 Jahren. In dieser ersten Holzungs-Periode müssen, laut Bemerkungen, die Birken in den 1sten 6 Jahren, und die Büchen in 20 Jahren geholt werden, daher theilt sich diese Periode wieder in 3, nemlich

1ste 6 Jahre worin die Birken abgeholzt seyn müssen.

2te 14 Jahre, und in den 6 + 14 = 20 Jahren müssen die Büchen abgeholzt seyn.

3te 5 Jahre, weil in den 6 + 14 + 5 = 25 Jahren das starke Bauholz gefällt werden muß.

Die 2te 25 Jahre theilen sich wieder der Eichen wegen in die Abtheilungen 5 und 20 Jahr, als

4te 5 Jahr, da die Eichen in 25 + 5 = 30 Jahren geholzt werden müssen.

Eben so fällt der Hau der 2ten Classe Birken mit in den beiden letzten Perioden, weil sie nach 20 Jahren in 10 Jahren zu verrechnen angegeben sind.

5te 20 Jahr machen mit den letztern 5 Jahren die 2te Periode aus, in welcher das abgeschätzte Bauholz gefällt werden muß. Und die sämmtliche angegebenen Perioden von 50 Jahren in Summa bestimmen die 1ste Abholzungs-Periode für das Brennholz der haubaren Classe.

Auf diese Perioden folgen die jüngern Classen im Hau, woher denn

6te 30 Jahr für die 2te Classe
7te 25 Jahr für die 3te Classe und
8te 15 Jahr für die 4te Classe folgen müssen.

§. 125.

Sind nun die Abholzungs-Perioden, wie gezeigt, bestimmt worden, so muß man das in jeder Periode ab-

abzuholzende Quantum dergestalt bestimmen, daß man das ganze Quantum durch die ganze Anzahl Jahre der Holzungs-Periode dividirt. So giebt z. E. $\frac{201}{30} = 6\frac{7}{10}$ Klaftern das Eichen Nutzholz, und $\frac{1762}{30} = 58\frac{11}{15}$ Klafter das Eichen Brennholz.

Eben so ist $\frac{60}{20} = 3$ das Nutzholz, und $\frac{622}{20} = 31\frac{1}{10}$ das Brennholz-Quantum der Rothbüchen, und eine genaue Betrachtung der Tabelle wird einem jeden leicht zeigen, wie von den andern Classen durch eine gleiche Anlage der Berechnung das Abholzungs-Quantum bestimmt worden.

§. 126.

Die Berechnung des Bauholzes wird auf folgende Art angelegt. Es sind nemlich 356 Stück extrastarkes Bauholz; und diese geben in 25 Jahren jährlich $\frac{356}{25} = 14$ Stück, und es bleiben 6 Stück übrig, welche man dem ordinär starken Holze zu Hülfe rechnen kann.

Ordinär stark sind 1495, dazu die übrig gebliebenen 6 Stück Extrastark, macht 1501 Stück, und diese geben jährlich

$\frac{1501}{25} = 60$ Stück Ordinärstark, und bleibt wieder 1 Stück übrig, welches dem Mittel zugerechnet wird.

Von dem mittel Bauholze muß so viel übergehalten werden, daß davon die zweiten 25 Jahr der Etat

an starkem Bauholze befriedigt werden kann, welches, da es jetzt 95 Jahr alt ist, nach 25 Jahren, 120 jährig ist, und also stark Bauholz geben kann.

Mittel Bauholz ist 4084 Stück, dazu 1 Stück stark, giebt
4085 Stück, davon muß übergehalten werden zu stark
1850 = 25 (14 + 60) für die 2ten 25 Jahre, bleibt also
2235 Stück Mittel, welche in den 1sten 25 Jahren geholzt werden können, und jährlich $\frac{2235}{25} = 89$ Stück geben, wobei 10 Stück übrig bleiben, welche zu dem kleinen Bauholze zugerechnet werden.

In dem kleinen Bauholze muß das Mittel-Bauholz für die 2te Periode übergehalten werden, weil das kleine Bauholz bis dahin 70 + 25 = 95 Jahr alt wird, und Mittel-Bauholz geben kann. Daher ist
6673 Stück klein Bauholz, dazu die 10 Stück Mittel, geben
6683; darin muß zu Mittel stehen bleiben
2225 = 89 × 25 für die 2ten 25 Jahre, und bleibt
4458 Stück klein Bauholz, welche in den 1-25 Jahr zu verrechnen sind, und jährlich $\frac{4458}{25} = 178$ Stück geben, und 8 Stück übrig lassen.

Nun fehlt noch das kleine Bauholz der 2ten Periode, welches in der ersten Classe nicht mehr anzutreffen ist. Da nun aber in der zweiten Classe das jüngste Holz 40 + 25 = 65 Jahr alt ist, so muß in dieser Classe auch schon klein Bauholz befindlich seyn, mithin kann man auch das fehlende aus dieser Classe nehmen, wozu man wieder die übrig gebliebenen 8 Stück zur Hülfe

nehmen kann. Hiernach muß also die zweite Classe $178 \times 25 - 8 = 4442$ Stück klein Bauholz der ersten Classe zu Hülfe geben.

Diese 4442 Stück betragen $\frac{4442}{6} = 740\frac{1}{3}$ Klaftern, und dies sind die 740 Klafter, welche vor der 2ten Classe in der Reihe: Bau- und Nutzholz abgezogen worden.

Die Sageblöcke kann man die ganze Classe durch in gleiche Abholzung bringen, und werden diese nicht in dem Mittel-Bauholze, wie das starke Bauholz, übergehalten. Der Mangel welchen man fast in den mehrsten Forsten an Sageblöcken findet, macht daß man mit denselben sich in der Art nach Möglichkeit zu helfen suchen muß, daß man von den gewöhnlich zu Sageblöcke angenommenen Maaßen abgeht, und dazu entweder starkes, auch wohl nur klein Bauholz anweisen muß, welches bei den Landbauten auch füglich angewendet werden kann.

§. 127.

Das Bauholz der jüngern Classen wird nicht in der Tabelle angegeben, sondern ist in dem Abholzungs-Quantum summarisch mit begriffen. Wollte man aber einen ohngefehren Ueberschlag davon machen, so müßte man für eine jede Classe in Proportion setzen: Wie sich verhält das ganze Quantum der ersten Classe inclusive Bauholz, zu dem darin befindlichen Bauholze, so verhält sich der Inhalt der jüngern Classe, zu dem davon ohngefehr zu erwartenden Bauholze. Hiernach würde seyn:

$16963 + 4906 : 4906 = 16895 : x$ oder

21869 : 4906 = 16805
4906
100830
151245
67220

21869	82445330	3769 Klafter zu erwartendes Bauholz der
	65607	2ten Classe.

168383
153083
153003
131214
217890
196821

§. 128.

Die in diesem Kiehnen Blocke melirten Holzarten werden sämtlich nicht weiter in Anschlag gebracht, weil man nicht wieder beim Anbau auf dieselben Rücksicht nehmen kann, indem der Block zum kiehnen Anbau bestimmt bleibt. Nur die Birken kann man als fortdauernd in diesem Blocke annehmen, weil sie auf einem besondern Platze zusammen gefunden worden, und weil diese Holzart von besonderer Nutzbarkeit als Brennholz ist. Um nun im weitern Verfolg dieses Turnus das zu erwartende Quantum Birken, welches jährlich geholzt werden kann, ohngefehr anzugeben, addire man die beiden vorgefundenen Classen zusammen, und dividire durch die Jahre des im Birkenholze angenommenen Turnus. Hiernach erhält man $\frac{2442+475}{30} = 97\frac{1}{5}$

Klafter Birken, welche man in der Continuation von den Birken in diesem Blocke zu erwarten hat.

§. 129.

Für den Block B im Birken-Schlagholze ist weiter nichts besonders zu bemerken, als daß die Eichen 3ter Classe, und Kiehnen 3ter Classe während dem ersten Turnus nicht in Abholzung gebracht werden können, daher ihrer auch in diesem Register nicht weiter Erwehnung geschehn darf.

§. 130.

Für den Block D im Haseln-Schlagholze ist zu bemerken, daß die Haseln in diesem, als Ober- und Unterholz zugleich bewirthschafteten Blocke, nur als Unterholz vorkommen, daher denn der Turnus nicht nach den Haseln, sondern nach dem Oberholze, und zwar nach der Holzart angelegt werden müße, welche die größte Anzahl Jahre zu ihrem Umtriebe bedarf, oder deren Abholzungs-Periode am größten angegeben ist. Da nun die Eichen dieses Blockes auf 100 Jahr zu verrechnen angegeben sind, so ist hier ein Umtrieb von 100 Jahren angenommen, und diese nach den verschiedenen für jede Holzart angegebene Holzungs-Periode, in verschiedene Abtheilungen eingetheilt worden, wie dies der aufmerksame Leser, durch Vergleichung der unter Tabelle No. 4. gemachten Bemerkungen, mit Beherzigung der oben gegebenen Regeln, leicht finden wird.

Die hier vorkommenden melirten Holzarten, als Eichen, Büchen, Birken und Espen machen das Ober-

holz dieses Blockes aus, und wird auf deren fernern Anbau gerechnet, daher muß man auch das fernerhin zu erwartende jährliche Abholzungs-Quantum nach einem mittlern Durchschnitt, wie oben gezeigt, berechnen. Dies ist mit den Birken und Espen geschehn, deren Turnus schon in der 4ten Periode zu Ende war. Eben dies ist auch mit den Haseln geschehn, wodurch man 105 Klafter für die folgenden Turnus der Haseln, als ohngefehres Quantum erhielt. Die Holzarten deren Anbau sich fernerhin nicht für den Block paßen, als die Kiehnen, bleiben auch für die Zukunft weg. Die 3te Classe der Rothbüchen liegt über den angenommenen Turnus hinaus, daher wird ihrer auch nicht weiter ererwehnt.

§. 131.

Mit dieser Tabelle ist denn zugleich das Geschäft des Taxators beendigt, und er schickt die Abschätzungs-Protokolle, mit allen bis hieher erklärten Tabellen und den dazu gehörigen Karten ein. Diese werden sodann durch den Oberforstmeister der Provinz auf dem Platze im Reviere selbst revidirt, und dienen dem Departement zur Regulirung der Abholzung, zum Wiederanbau, und zur Verbesserung der Forst.

§. 132.

Das erste Geschäfte des Departements nach erhaltenen Taxations-Protokollen ist nunmehr, aus denselben einen Material-Etat für das Revier anzufertigen. Hierzu ist zuförderst nothwendig eine genaue Uebersicht von dem Abholzungs-Quantum zu erhalten, welches das Revier in Continuation, wenigstens wäh-

rend den Jahren der haubaren Classe derjenigen Holzart geben kann, in welcher die 1ste Classe zu ihrer Abholzung die längste Zeit erfordert.

Um nun mit Genauigkeit übersehn zu können, wieviel von jeder Holzart in den verschiedenen Holzungs-Perieden nach den Tabellen des Taxator geholzt werden kann, und hieraus durch zweckmäßig angelegte Berechnung, welche sich auf eine gründliche Kenntniß der Forst-Naturgeschichte und Forst-Oekonomie gründen muß, das Abholzungs-Quantum auszumitteln, welches in möglichst gleichem Ertrage jährlich geholzt werden kann, darf man nur eine Tabelle anfertigen, welche wie die Tabelle No. 5. eingerichtet seyn könnte. In der ersten Rubrike dieser Tabelle könnte man aus den besondern Holzungs-Perioden eines jeden Blockes, die allgemeinen Holzungs-Perioden des ganzen Reviers angeben. Hierauf für jede Holzart eine Abtheilung annehmen, welche in sich wieder für jeden Block eine Rubrique, und außerdem eine Rubrike mit der Ueberschrift Summe erhalten könnte. In dieser Tabelle kann zuerst eingetragen werden in einer durchlaufenden Reihe, was sich laut summarischer Nachweisung von jeder Holzart in jedem Blocke mit Nachwuchs, für Nutzholz befindet. In einer zweiten Reihe, das Brennholz auf gleiche Art mit Nachwuchs berechnet, welches beides in die gehörige Rubriken summarisch eingetragen werden kann.

Hierauf würde man neben jeder Holzungs-Periode das nach der Abschätzung bestimmte Abholzungs-Quantum einer jeden Holzart in die Rubriken gehörig eintragen, wie dies der aufmerksame Leser leicht bei Vergleichung der Tabellen No. 4 und 5. wird sehen können.

§. 133.

Betrachtet man nun diese Tabelle genau, so sieht man aus den, in der Rubrike Summe angegebenen, Abholzungs-Quantis einer jeden Holzart bald, daß der Ertrag in jeder Periode beträchtlich verschieden ausfällt, daß in den erstern Jahren, in welchen noch verschiedene unter den dominirenden Holzarten gefundene alte Hölzer sich vorfinden, und in wenig Jahren zur Abholzung angegeben sind, ein beträchtliches Abholzungsquantum sich vorfindet, welches aber fast mit jeder neuen Holzungs-Periode abnimmt, und am Ende der ersten Classe der Haupt-Holzart nur ganz klein ausfällt. Hieraus folgt ganz natürlich, daß das Revier in den ersten Jahren einen Ueberfluß, am Ende der 1sten Classe aber einen Mangel haben müsse, wenn dasselbe nicht ganz vorzüglich gut bestanden, und in Verhältniß der daraus angewiesenen Landesbedürfniße, beträchtlich groß ist.

Es muß also gewiß ein Haupt-Augenmerk des Forst-Departements seyn, durch eine zweckmäßige Oekonomie den Ueberfluß in den ersten Perioden zu erhalten, und ihn so anzuwenden, daß dadurch für die letzte Perioden gespart, und dem Holzmangel in denselben vorgebeugt werde. Dies Ersparen kann nicht anders geschehn, als daß man die alten Hölzer, welche in einer kurzen Zeit abgeholzt seyn müssen, in den andern Holzarten, welche noch lange auf dem Stamme zu erhalten sind, überhalte, und von leztern so lange erstere dauern, nur soviel in Abholzung bringe als zu diesen zugelegt werden muß, damit der Ertrag gleich werde.

So sieht man in der Tabelle No. 5. in den untereinander stehenden Berechnungen, in den Eichen, daß

so lange die Eichen in dem Blocke B dauern, welche in einer 8 jährigen Abholzung jährlich 18 Klafter geben, in den Eichen des Blocks A, nur 46 Klafter, in den folgenden 22 Jahren aber, welche in den Eichen dieses Blockes noch geholzt werden muß, 46 + 18 = 64 Klafter geholzt werden kann. Die Eichen beider Blöcke A und B werden wieder in dem Blocke C übergehalten, und alsdenn giebt dieser Block noch, für die letztere 50 Jahre, welche in den Eichen desselben geholzt werden muß, jährlich 45,14 Klafter, welchen der Block D jährlich mit 18,16 Klafter zur Hülfe kommt, und von dem darin übrig bleibendem Reste in den letzten 20 Jahren, die 63,3 Klafter allein erfüllt.

§. 134.

Die Rechnung welche uns diese Resultate giebt, gründet sich auf das vorhergehende, und legt man sie auf folgende Art an. Sollen die Eichen im Blocke A, die Eichen des Blockes B für die folgenden 22 Jahre, wenn diese ausgegangen seyn werden, mit erfüllen, so muß man in derselben das dazu erforderliche Quantum mit seinem Zuwachse reserviren, und den Ueberrest die ganzen 30 Jahre hindurch in gleiche Abholzung bringen. Dieses zu reservirende Quantum ist jährlich 18 Klafter, und beträgt also mit Zuwachs $18e^{21} + 18e^{20} + 18e^{19} + \text{rc.} + 18e + 18$ od. $\frac{18e^{22} - 18}{e - 1}$ od. $\frac{18(e^{22} - 1)}{e - 1}$

Setzt man das die 30 Jahre hindurch noch zu holzende Quantum gleich x, so wird $\frac{xe^{30} - x}{e - 1} =$

$\frac{x(e^{30}-1)}{e-1}$ dieses ganze Abholzungs-Quantum in Summa angeben, und von dem ganzen Brennholz-Bestande des Blockes A, mit dessen Zuwachse, oder von $1531\,e^{29}$ wird sowohl das zu reservirende Quantum $\frac{18(e^{22}-1)}{e-1}$, als das die ganzen 30 Jahre hindurch zu holzende Quantum $\frac{x(e^{30}-1)}{e-1}$ abgezogen werden, und das ganze Quantum mit seinem Zuwachse erschöpfen, daher denn $1531\,e^{29} - \frac{18(e^{22}-1)}{e-1} -$

$$\frac{x(e^{30}-1)}{e-1} = 0$$

oder $1531 . e^{29} - \frac{18(e^{22}-1)+(e^{30}-1)}{e-1} = 0$ oder

$$1531 . e^{29} . (e-1) - 18(e^{22}\ 1) = x(e^{30}-1)$$

oder $\frac{1531 . e^{29}(e-1) - 18(e^{22}\ 1)}{e^{30}-1} = x$

Setzt man in die Stelle von e den gehörigen Werth, und berechnet die Formel so findet man $x = 46$ für die ersten 8 Jahre, und für die folgenden 22 Jahre treten die reservirten 18 Klafter jährlich dazu, und geben mit ihnen zusammen 64 Klafter.

§. 135.

Legt man die Berechnung auf gleiche Art für die Eichen des Blockes C an, welche in 80 Jahren geholzt seyn müssen, so ist $\frac{1326 . e^{79}(e-1) - 64(e^{30}-1}{e^{80}-1} = x.$

Die Berechnung zeigt aber, daß $1326 . e^{79} (e - 1)$ kleiner als $64 (e^{30} - 1)$ ist, welches anzeigt, daß dies Quantum nicht groß genug ist, um 64 Klafter jährlich darin überzuhalten, man berechne also wie viel von diesem Quantum jährlich die 50 Jahre nach Verlauf der 30 Jahre geholzt werden kann, welches sich ergiebt, wenn man setzt $1326 . e^{79} = \frac{x (e^{50} - 1)}{e - 1}$ oder $\frac{1326 . e^{79} (e - 1)}{e^{50} - 1} = x$ woraus sich durch die Berechnung $x = 45,14$ Klafter ergiebt.

Auf gleicke Art lege man endlich noch die Berechnung für die Eichen des Blockes D an, welche in 100 Jahren abgeholzt seyn müssen, so ergiebt sich: Weil von den 64 Klaftern der 1sten 30 Jahre durch die vorhergefundene 45,14 Klafter schon ein großer Theil erfüllt wird, so bleiben noch $64 - 45,14 = 18,86$ während den 50 Jahren, welche die Eichen des Blockes C währen, und 64 Klafter während den letzten 20 Jahren zu reserviren, und man wird setzen müssen

$$\frac{1054 . e^{99} (e - 1 - 18,86 (e^{50} - 1 - 64 (e^{20} - 1)}{e^{100} - 1} = x.$$

Es findet sich aber hier wieder, daß die 1054 Klafter nicht hinreichen, um dies alles zu übertragen, daher würde man wieder in diesen 1054 Klaftern 45,14 Klafter für die letztern 20 Jahre asserviren, und den Ueberrest zu einer 70jährigen Abholzung berechnen. Hierzu würde man setzen müssen

$$\frac{1054 . e^{99} (e - 1) - 45,14 (e^{20} - 1)}{e^{70} - 1} = x,$$ wor-

aus sich $x = 18{,}16$ Klafter für die 50 Jahre, und hierauf $45{,}14 + 18{,}16 = 63{,}3$ für die letztere 20 Jahre ergiebt.

§. 136.

Auf diese Art wäre nun die Abholzung die ganzen 100 Jahre hindurch arithmetisch gleich gemacht, es bleibt nur noch die Frage übrig, ob diese Oekonomie auch in der Anwendung praktisch ausführbar seyn werde oder nicht. Jedermann, welcher auch nur einigermaßen mit dem Wachsthum, und der Natur der Bäume bekannt ist, wird hier bald bemerken, daß in einem Districte, der 1sten Classe einer Holzart, sich jederzeit schon Bäume befinden, welche entweder ihrem Alter nach, oder durch Krankheit, oder durch ihren dichten Stand, indem sie durch die andere Bäume erstickt werden, ihrem Absterben nahe sind, daß es also praktisch unter diesen Bedingungen nicht möglich sei, einen dergleichen District auf einen Zeitraum von 30 Jahren gänzlich mit dem Hiebe zu verschonen. Hieraus würde nun zwar folgen, daß in diesem besonderen Falle der arithmetischen Berechnung nicht geradehin gefolgt werden könne, aber dennoch würde es noch nicht Beweis für die gänzliche Verwerflichkeit dieses Vorschlages seyn. Es würde nemlich nur in so fern eine Abänderung verlangen, daß man nach einem, aus der Kenntniß der Sache fließenden, Durchschnitte jährlich in den erstern 30 Jahren ein gewisses Quantum in den Blöcken C und D, für das Holz in Abholzung bringe müsse, welches der Natur nach während dieser Zeit absterben müßte, daß aber mit dem andern Theile die vorgeschlagene Oekonomie sehr gut betrieben werden könne.

§. 138.

Die Rothbüchen sind nach einer gleichen Berechnung während der haubaren Classe in gleicher Abholzung gebracht, da aber in diesem Falle die zu übertragende Quanta nur klein sind, und die Berechnung so ausfällt, daß in allen den drei Blöcken, worin sich Rothbüchen befinden, die Abholzung zu gleicher Zeit und von Anfange an betrieben werde, so kann hier der Einwand nicht Statt haben, und die praktische Ausübung wird sich hier sehr gut mit der arithmetischen Berechnung vertragen.

§. 138.

Nun bliebe noch übrig das gleichmäßige Abholzungs-Quantum für die übrigen Holzarten, wenigstens während der haubaren Classe der Kiehnen zu bestimmen. Da nun diese Holzarten, die Kiehnen ausgenommen, einen so kurzen Umtrieb haben, so läßt sich in derselben diese Berechnung nicht unmitelbar anlegen, und man muß sich der Kiehnen bedienen, um die Ungleichheiten in der Abholzung dieser besondern Holzarten auszugleichen. Zu diesem Ende suche man summarisch, wie viel in jeder Periode während der 50 Jahre der 1sten Classe Kiehnen von den übrigen Holzarten geholzt werden könne, nach der summarischen Berechnung des Taxators. Hierdurch findet man:

sten	Jahr	Weißbüch.	Birken.	Elsen.	Espen.	Haseln.	Summa.
1	5	19,9	$621\frac{1}{3}$	$11\frac{2}{3}$	—	$33\frac{1}{4}$	686
2	1	19,9	627	$11\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{8}$	$33\frac{1}{4}$	697
3	2	19,9	220	$11\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{8}$	$33\frac{1}{4}$	290
4	1	19,9	220	$11\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{8}$	$66\frac{2}{3}$	323
5	7	19,9	$224\frac{1}{4}$	$11\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{8}$	$66\frac{2}{3}$	327
6	4	19,9	$142\frac{1}{4}$	$6\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{8}$	$66\frac{2}{3}$	240
7	1	27,6	$189\frac{3}{4}$	$6\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{8}$	$52\frac{1}{2}$	281
8	4	27,6	$186\frac{1}{3}$	$6\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3}$	$52\frac{1}{2}$	276
9	3	16,1	182	$6\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3}$	$52\frac{1}{2}$	260
10	2	16,1	229	$9\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	$52\frac{1}{2}$	310
11	10	16,1	278,7	$9\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	$52\frac{1}{2}$	359
12	10	7,7	278,7	$9\frac{1}{2}$	$2\frac{2}{3}$	$52\frac{1}{2}$	351

Betrachtet man diese verschiedenen Abholzungs-Quanta, so ergiebt sich, daß in dem 2ten Einem Jahre 697 Klafter das größte Abholzungs-Quantum sei, und daß daher von den Kiehnen, um die Abholzung auszugleichen, die 1ten 5 Jahr 11, die 3ten 2 Jahr 407, die 4ten 1 Jahr 373. die 5ten 7 Jahr 369, die 6ten 4 Jahr 456, die 7ten 1 Jahr 416, die 8ten 4 Jahr 421, die 9ten 3 Jahr 437, die 10ten 2 Jahr 388, die 11ten 10 Jahr 338 und die 12ten 10 Jahr 346 Klafter zu Hülfe genommen, das übrige aber, wie es der Classe angemessen ist, in gleiche Abholzung gebracht werden müsse. Da nun in den Blöcken B und D sich noch alte Kiehnen befinden, welche laut Taxation die erstern 5 Jahre geholzt werden müssen, und diese hinreichend sind, die Ausgleichung der ersten Periode zu erfüllen, so darf man nur den Ueberrest der Kiehnen auf 45 Jahren verrechnen. Es kömmt nun darauf an, die Quanta summarisch zu bestimmen, welche mit ihrem Nachwuchse in den Kiehnen übergehalten werden müssen.

§. 139.

Die ersten 11 Klafter werden durch die Kiehnen der Blöcke B und D, welche jährlich 83,1 Klafter geben, übergehalten.

Die 407 Klafter, welche in der 3ten Periode zur Hülfe gegeben werden müssen, würden zu $407 . e^{43} + 407 e^{42}$ heranwachsen, wenn sie nicht abgeholzt würden, mithin $\frac{407 . e^{44} - 407 e^{42}}{e - 1} = \frac{407 (e^{44} - e^{42})}{e - 1} = \frac{407 . e^{42} (e^2 - 1)}{e - 1}$ heranwachsen, und daher wird $\frac{407 e^{42} (e^2 - 1)}{e - 1}$ das Quantum betragen, welches für diese Periode asservirt werden muß.

Die in dem 4ten Einem Jahre überzuhaltende 373 Klafter würden noch 41 Jahre haben nachwachsen können, mithin zu $373 e^{41} = \frac{373 e^{41} (e - 1)}{e - 1}$ erwachsen können, und dies wird auch das zu reservirende Quantum für dies Jahr seyn.

In der 5ten Periode müssen jährlich 369 Klafte übergehalten werden, und diese würden mit Zuwachs auf die Zeit, wenn sie nicht geholzt würden zu $369 e^{40} + 369 e^{39} + 369 e^{38} + 369 e^{37} +$ rc. $+ 369 e^{35} + 369 e^{34}$ od. $\frac{369 e^{41} - 369 e^{34}}{e - 1} = \frac{369 (e^{41} - e^{34})}{e - 1} = \frac{369 e^{34} (e^7 - 1)}{e - 1}$ heranwachsen können, daher für

diese Periode das Quantum $\frac{369\, e^{34}(e^7 - 1)}{e - 1}$ erhalten werden muß.

Aus diesen Beispielen wird der aufmerksame Leser leicht einsehn, daß $\frac{456\, e^{30}(e^4 - 1)}{e - 1}$ für die 6ten 4 Jahre; $\frac{416\, e^{29}(e - 1)}{e - 1}$ für das 7te Eine Jahr; $\frac{421\, e^{25}(e^4 - 1)}{e - 1}$ für die 8ten 4 Jahre; $\frac{437\, e^{22}(e^3 - 1)}{e - 1}$ für die 9ten 3 Jahre; $\frac{388\, e^{20}(e^2 - 1)}{e - 1}$ für die 10ten 2 Jahre; $\frac{338\, e^{10}(e^{10} - 1)}{e - 1}$ für die 11ten 10 Jahre; und endlich $\frac{346\,(e^{10} - 1)}{e - 1}$ für die 12ten 10 Jahre müsse reserviret werden. Setzt man nun x für das Abholzungs-Quantum der Kiehnen, welches von den Ueberreste in den 45 Jahren geholzt werden muß, so ist $\frac{x(e^{45} - 1)}{e - 1}$ das ganze Quantum, und es wird seyn

$$10874e^{49} - \frac{407e^{42}(e^2 - 1)}{e - 1} - \frac{373e^{41}(e - 1)}{e - 1} - \frac{369e^{34}(e^7 - 1)}{e - 1} - \frac{456e^{30}(e^4 - 1)}{e - 1} - \frac{416e^{29}(e - 1)}{e - 1} - \frac{421e^{25}(e^4 - 1)}{e - 1} - \frac{437e^{22}(e^3 - 1)}{e - 1} - \frac{388e^{20}(e^2 - 1)}{e - 1}$$

$$-\frac{338e^{10}(e^{10}-1)}{e-1}-\frac{346(e^{10}-1)}{e-1}=\frac{x(e^{45}-1)}{e-1}$$

woraus sich

$$\frac{10874e^{49}(e-1)-407e^{42}(e^{7}-1)-373e^{41}(c-1)-369e^{34}(e^{7}-1)-456e^{30}(e^{4}-1)-416e^{29}(e-1)-421e^{25}(e^{4}-1)-437e^{22}(e^{3}-1)-388e^{20}(e^{2}-1)-338e^{10}(e^{10}-1)-346(e^{10}-1}{e^{45}-1}=x$$

ergiebt, und wenn die Formel berechnet, so findet man $x = 28,8$.

Diese 28,8 zu den in jeder Periode reservirten Klaftern addirt, giebt in der 3ten Periode 407 + 288 = 401,8 ꝛc. wie die Tabelle zeigt.

Hier könnte man den Einwand machen, daß die verschiedenen Holzarten theils theurer, theils wohlfeiler als die Kiehnen sind; mithin nicht mit den Kiehnen gleich gesetzt werden können. Dies ist allerdings wahr, allein da dies nur ein Beispiel ist, und den Weg zeigen soll, welchen man einzuschlagen habe, wenn man diese Oekonomie anwenden will, so bleibt es bei der wirklichen Anwendung überlassen, zuvor eine jede Holzart nach dem Verhältnisse, wie sie mit den Kiehnen stehn, in Kiehnen zu verwandeln, und hierauf die Rechnung, wie vorbeschrieben, anzulegen, wenn mau eine strenge Genauigkeit verlangt.

Diese Oekonomie gewährt nicht nur den Vortheil, daß die Abholzung auf eine lange Zeit in gleichmäßigen Quantis fortgeht, daß besonders in den kostbaren Holzarten, wenigstens auf lange Zeiten, dem Mangel vorgebeugt werde, sie giebt überdies auch ein stärkeres Abholzungs-

Quantum in Summa, welches man durch Vergleichung beider in der Tabelle No. 5. gezogenen Summen sieht, und welches durch alle Forsten der Königlich-Preußischen Staaten ein nicht unansehnliches Quaneum betragen dürfte, ohne daß man dadurch befürchten darf, die Reviere zu ruiniren. Diese nemliche Oekonomie läßt sich auch in dem Nutzholze der verschiedenen Laubholzarten unter der Einschränkung anwenden, daß man hier nur eine jede Holzart in sich selbst überhalten kann, und dadurch den Ertrag desselben auf eine längere Zeit gleich erhalten und vermehren kann, ohne daß dadurch jedoch das Revier, so wie beim Brennholze einen gleichen Hau an dergleichen Nutzholz die erste Classe hindurch erhält.

Ist nun hierdurch bestimmt, wie viel Klafter von dem Reviere in Continuation geholzt werden können, wenn kein besonderes Unglück den Etat alterirt, so wird nach einem Durchschnitte von etwa 10 Jahren, der auf das Revier angewiesene Etat der Landesbedürfnisse angefertigt, und dieser gegen den vorher gefundeuen Etat balancirt, wo sich nun ergiebt, ob die Bedürfnisse befriedigt werden können, und ob ein Ueberschuß bleibt, oder ob sie nicht befriedigt werden können, und wie groß das Deficit sei. Im erstern Falle bestimmt das Departement von dem Ueberreste ein gewisses Quantum zum jährlichen Verkauf, wobei es zur Vorsicht einen Theil für besondere unvorhergesehne Fälle reservirt, und legt nun nach diesem balancirten Material-Etat den Geld-Etat des Reviers an, welcher denn der Cameral-Etat ist. Im letztern Falle muß das Departement aber mit möglichster Vorsicht untersuchen, ob der Etat der Landesbedürfnisse nicht in einem oder andern Punkte herabgesetzt werden könne, ob nicht einige Bedürfnisse auf ein anderes Revier angewiesen werden können, oder ob

denselben nicht zum Theil durch andere Holzersparnisse, durch Torfstiche ꝛc. abgeholfen werden kann, und nachdem dies alles regulirt ist, wird wieder der Material-, und aus diesem der Geld-Etat so angefertigt, daß wo irgend möglich für Unglücksfälle ein gewisses Quantum reservirt werde.

Wären die Forsten von je an nach richtigen Grundsätzen bewirthschaftet worden, hätte man Abholzung und Wieder-Anbau nach richtigen Verhältnissen folgen lassen, und Unglücksfälle, theils nicht aus Mangel an Kenntnisse herbeigezogen, theils wenn sie eingetreten waren, auf eine zweckmäßige Art wieder gut zu machen und zu verbessern gewußt. Hätte man dieses, wegen seines langsamen Wuchses und Unentbehrlichkeit, kostbare Materiale nicht so unverantwortlich verwüstet, und sich ein Verdienst daraus gemacht die Wälder zu ruiniren, so würden in neuern Zeiten weder Mangel daran sich vorfinden, noch für die Zukunft zu fürchten seyn, weil man ein jedes Revier mit allen Sorten dem Alter nach in richtigem Verhältnisse sich folgenden Bäumen bestanden antreffen würde. Da nun aber leider dies nicht geschehen ist, so ist es ein Haupt-Augenmerk und das eifrigste Bestreben der Forstmänner unserer Zeit, den Fehler unserer Vorfahren zu verbessern, und wenigstens für die Nachkommen weniger empfindlich zu machen. Zu diesem Ende ist es nöthig zu wissen, in welchem Verhältnisse die verschiedenen Classen in Absicht ihres Flächen-Inhaltes stehen müssen, wenn die Reviere in richtigem Verhältnisse der Classen stehen sollen. Eine kleine Ueberlegung zeigt dem denkenden Forstmanne bald, daß die Anzahl Jahre, welche dem natürlichen Turnus der Holzarten nach in jeder Classe geholzt werden müssen, verbunden mit dem guten oder schlechten Bestande der Holzarten, das Verhältniß bestimmen

müssen. Nun ist zwar das Verhältniß, welches durch die Abholzungs-Jahre der Classen bestimmt wird, bekannt, allein das Verhältniß, welches durch die Bestände bestimmt wird, läßt sich nicht nach Beschaffenheit des Bodens mit Gewißheit angeben, weil die Witterung oft mehr als der Boden zu dem guten Bestande beitragt. Hieraus folgt, daß sich das Verhältniß, in welchem die Classen eines Revieres gegen einander stehen müssen, nicht mit mathematischer Schärfe angeben läßt, man muß sich daher begnügen, das Verhältniß nach den Jahren zum Grunde zu legen, und daher muß das Bestreben bei jetziger Bewirthschaftung der Forsten seyn, für die Zukunft die Reviere nach diesem Verhältnisse einzuleiten.

Wäre diesemnach ein Kiehnen-Revier 2240 Morgen groß, und durch Versuche der Turnus auf 120 Jahren angegeben, so wird in der haubaren Classe 50 Jahr, in der 2ten Classe 30 Jahr, in der 3ten Classe 25 Jahr und in der 4ten Classe 15 Jahre geholzt, wenn das Holz nur in seinem völlig haubaren Alter geholzt werden soll, und die Classen werden im Verhältnisse dieser Zahlen stehen müssen, wenn das Abholzungs-Quantum den ganzen Turnus durch in jedem Jahre in gleichem Ertrage fortlaufen soll. Um nun nach diesen Zahlen das Revier einzutheilen, setze man:

50 : dem Inhalte der 1ten Classe
30 : dem Inhalte der 2ten Classe
25 : dem Inhalte der 3ten Classe
15 : dem Inhalte der 4ten Classe

120 : 2240 dem ganzen Inhalt = 50 : 1ten Classe

woraus diese sich $= \frac{2240 \times 50}{120} = \frac{2240 \times 5}{12} = \frac{560 \times 5}{3}$ $= 933\frac{1}{3}$ Morgen = 933 Morg. 60 □R. ergiebt.

Eben so ist $120 : 2240 = 30 : \frac{2240 \times 30}{120}$ $= 560$ Morgen dem Inhalte der 2ten Classe,

$120 : 2240 = 25 : \frac{2240 \times 25}{120} = \frac{56 \times 25}{12} = 466\frac{2}{3}$ M. = 466 M. 120 □R. = dem Inhal. der 3. Clas., u.

$120 : 2240 = 15 : \frac{2240 \times 15}{120} = 56 \times 5 = 280$ Morgen = dem Inhalte der 4ten Classe.

Aus diesem Beispiele läßt sich leicht einsehen, wie in jeder Holzart dies Verhältniß bestimmt werden kann, welches nun zwar, wie aus obigem erhellet, eine vollkommene gleiche Abholzung nicht mit Bestimmtheit zusichern kann, aber doch der einzige Leitfaden ist, dem der Forstmann zur Bewirkung dieser Absicht folgen kann.

Das vorzügliche Hülfsmittel zur Erreichung dieses Zweckes, ist der richtige und zweckmäßige Wiederanbau der Räumden und Bloßen, welche sich in den mehrsten Forstrevieren als eine Folge der vormaligen schlechten Bewirthschaftung so häufig vorfinden.

§. 140.

Um dies durch ein Beispiel zu erläutern, wollen wir wieder den Kiehnen Block A, welcher 2240 Morgen Inhalt hat, betrachten. Im vorigen §. ist berechnet, daß wenn die Classen in richtigem Verhältniße stehen sollen, daß aldenn

933 Morgen 60 □R der Inhalt der 1sten Classe
560 „ „ „ der Inhalt der 2ten Classe
466 „ 120 „ der Inhalt der 3ten Classe
u. 280 „ der Inhalt der 4ten Classe seyn müße.

Nun findet man laut Tabelle No. 1.

1ste Classe	616 Morgen	.		□R
2te Classe	549	.	8	.
3te Classe	398	.	10	.
4te Classe	245	.	106	.
Räumden	308	.	35	.
Blößen	123	.	21	.

Es fehlt also der ersten Classe an ihrem richtigen Verhältniße, wenn man annimmt, daß der Boden sämtlicher Blößen zum Holzanbau tauglich sey, welches nach den Taxations-Protokollen beurtheilt werden muß, 933 Morg. 60 □R — 616 Morg. = 317 Morg. 60 □R; der 2ten Classe 560 Morg. — 549 Morg. 8 □R = 10 Morg. 172 □R; der 3ten Classe 466 Morg. 120 □R — 398 Morg. 10 □R = 68 Morg. 110 □R, und endlich der 4ten Classe, 280 Morg. — 245 Morg. 106 □R = 34 Morg. 74 □R, welche von den Räumden und Blößen so in Anbau gebracht werden müßen; daß sie den verschiedenen Classen wenigstens im zweiten Turnus zu Hülfe kommen und möglichst das richtige Verhältniß wiederherstellen.

§. 141.

Soll nun diese Absicht erfüllt werden, so müßen von den Räumden die 303 Morgen 35 □R und noch 9 Morgen 25 □R Blößen der ersten Classe zugegeben werden, und von ihnen jährlich neben dem Theile, welcher von dem Reviere selbst in Anbau gebracht werden muß, noch der 50ste Theil mit angebaut werden. Hiernach würden also von den Räumden während der 1sten Classe jährlich $\frac{417 \text{ Morg. } 60 \text{ □R}}{50}$ = 6 Morgen

62 □R angebaut werden. Von den übrig bleibenden Blößen würde man 10 Morg. 172 □R zu der 2ten Classe rechnen rechnen, und jährlich während den Hau in dieser Classe betrieben wird den 30ten Theil, mithin $\frac{10 \text{ Morg. } 172 \;\square\text{R}}{30} = 66 \;\square\text{R}$ mit in Anbau bringen.

Die 68 Morgen 110 □R welche der 3ten Classe fehlen müßen gleichfalls aus den Räumden für diese Classe bestimmt werden, und daher während der Periode dieser Classe jährlich $\frac{68 \text{ Morg. } 110 \;\square\text{R}}{25} = 2$ M. 134 □R in Anbau gebracht werden.

Die leztern 34 Morgen 74 □R der Blößen, welche der 4ttn Classe fehlen, können nun, wenn es die Umstände zulaßen sogleich mit einemmale angebaut werden, und in diesem Falle noch in dem 1sten Turnus dieser Classe zu Hülfe kommen. Es wird nemlich wenn dies geschehn kann, das darauf stehende Holz ein Alter von wenigstens 115 Jahr erreichen wenn es der Hau trift, und wenn es wirklich auch noch jünger zum Hau kommen sollte, so würde es dennoch immer ein wesentlicher Vortheil seyn, theils weil doch immer eine Quantität werigstens Brennholz davon zu erwarten ist, theils auch weil sich durch die sich ansetzendt Dammerde der Boden für den kommenden Turnus merklich verbeßern wird.

§. 142.

Bei diesem Vorschlage zum Wiederanbau der Raumden und Blößen, möchte nun vielleicht mancher

Forstmann glauben, daß dem Reviere dadurch ein Schade zugefügt würde, wenn er nicht alle Raumden und Blößen sobald wie möglich in Anbau bringen kann, welches er in seinem gutgemeinten Eifer gerne thun mögte. Es läßt sich nun wohl nicht leugnen, daß diese Räumden eher wieder nutzbar seyn könnten, allein es würden alsdenn alle diese Blößen im folgenden Turnus wieder zur ersten Classe gehören, und in den erstern Jahren desselben wieder einen Ueberfluß geben, wenn die letztern Classen einen Mangel haben. Mit einem Worte, es würde nie der wahre Hauptzweck der Forstwirthschaft erfüllt werden, die Reviere dahin zu bringen, daß sie mit allen Holzarten einer jeden Classe so bestanden gefunden werden, daß sie den ganzen Turnus durch einen gleichen jährlichen Ertrag geben können.

§. 143.

Es bleibt nun eine nicht leichte Aufgabe der Forstwirthschaft deu Hau so zu dirigiren, daß alle die Zwecke bei dem Wiederanbau erfüllt werden können, welches sich wohl selten so möchte vereinigen lassen, wenn man alle hierbei concurrirende Umstände in Erwägunn zieht. Es würde theils aber die Grenzen dieses Werkes überschreiten, theils würde es hier auch nur sehr unvollkommen gezeigt werden können, weil dazu nicht nur ein vollkommenes Taxations-Register, theils aber auch eine Karte des Reviers erfordert würde, um den Hau nach Localität und allen obwaltenden Umständen dirigiren zu können. Aus diesen Gründen übergehe ich diesen Theil der Forst-Oekonomie um so eher, weil hier keine besondern Rechnungsarten vorfallen, welche sich nicht aus dem vorangehenden schon leicht einsehen ließen.

§. 144.

Auf die im Vorhergehenden auseinander gesetzte Verhältnisse der verschiedenen Classen gegen einander stützen sich auch, die Gründe, welchen man folgen muß, wenn von einem Reviere ein Theil urbar gemacht werden soll, wenn man das Revier in dem Stande erhalten will, in welchem es den richtigen Forst-Prinzipien nach seyn sollte, und wenn diese Urbarmachung mit dem geringsten Verluste geschehn soll.

Fände sich nemlich ein Forstrevier, welches seiner besondern Größe wegen nicht hinlänglich übersehen werden, seiner schlechten Lage wegen, auch nicht nutzbar genug seyn könnte, von dem sich aber der Boden zum Getreide-Anbau gut qualificirte, so würde dieser District dem Staate mehr nützen, wenn man einen Theil desselben durch Radungen urbar machte, und zum Ansetzen von Colonisten rc. anwendete.

In diesem Falle ist zuvörderst nothwendig genau zu berechnen nicht nur die Bedürfnisse welche von den schon vorhandenen Unterthanen bereits auf das Revier angewiesen sind; sondern auch was durch die neu anzubauenden Unterthanen dazu kömmt. Ist dies geschehn, so muß man den Flächenraum auszumitteln suchen, auf welchen soviel haubares Holz stehen kann, um diesen Bedarf in einem Jahre zu befriedigen, und diesen muß man mit der Anzahl Jahre multipliziren, welche in jeder Classe geholzt werden muß, so erhält man den Flächenraum, welchen man für jede Classe conserviren muß. Zu diesem Flächenraume kann nun der Forstwirth in jeder Classe noch einen verhältnißmäßigen Theil Ueberschuß zur Reserve für unvorhergesehne Fälle rechnen, und der übrige Theil kann dann zum Urbarmachen

bestimmt werden. Das auf diesem Theile befindliche Holz darf jedoch nicht mit einemmale niedergehauen werden, wenn dies nicht mit einem vorzüglichen Nachtheil des Staates geschehn soll, sondern wenn das Revier keinen andern Absatz hat, so muß man durch Holz verzehrende Werke nach und nach, wie es das Alter des Holzes verlangt, den urbarzumachenden Theil in Abholzung bringen, und daher mit dem Anbau der neuen Unterthanen sich darnach richten. Da in diesen Districten auf keinen Wiederanbau des Holzes förderhin gesehn werden kann, so wird man bei Regulierung des Haues sich wohl nach den Umständen richten, und mit der höchsten Benutzung dieses Reviers lieber etwas nachsehn, wenn es dem Anbau der neuen Colonisten zuträglich ist. Dieser Fall erfordert übrigens keine besondere Rechnungsart, und wird man durch seine kleine Ueberlegung leicht den Weg finden, welchem man bei dieser Berechnung folgen muß.

§. 145.

Um das Rechnungs-Geschäfte für den Taxator bei Anfertigung der summarischen Nachweisung zu erleichtern, zugleich aber auch, um eine Einförmigkeit der Berechnungen zu bewirken, und alle willkührliche oft fehlerhafte Formeln bei Berechnung des während der Abholzung in Rechnung zu bringenden Nachwuchses zu vermeiden, ist diesem Werke eine Tabelle zur Berechnung vorerwehnten Nachwuchses beigefügt, welche nach einer berichtigten, und von dem Forst-Departement approbirten Formel berechnet ist. Die äussersten Grenzen des Nachwuchses für alle Holzarten sind in der Tabelle angenommen, 6 Klafter auf 1000 Klafter jährlich, als der geringste, und 30 Klafter von

1000 Klafter jährlich als der höchste Nachwuchs. Und für diese Verhältnisse, und alle dazwischen liegende ganze Zahlen ist in der Tabelle der Nachwuchs einer Klafter auf 7 zehntheilige Stellen und auf so viel Jahre berechnet worden, wie dies die verschiedenen in den Baumhölzern für die 1ste Classe bestimmte Holzungs-Perioden erfordern. Da nun angestellte Versuche $16\frac{1}{2}$ Klafter auf 1000 Klafter als den höchsten jährlichen Nachwuchs der Eichen angeben, und die längste Zeit, welche man in der haubaren Classe dieser Holzart holzen kann 200 Jahre sind, so sind von 6 bis incl. 17 Klafter auf 1000 jährlich der Zuwachs einer Klafter von 1 bis 200 Jahren berechnet: Weil ferner die Versuche für die Büchen als höchsten Nachwuchs 20 Klafter auf 1000 angeben, und 150 Jahr die längste Holzungs-Periode der 1sten Classe dieser Holzart ist, so ist für 18, 19 und 20 Klafter auf 1000 der Zuwachs Einer Klafter von 1 bis 150 Jahre berechnet. Weil ferner 30 Klafter von 1000 als der höchste Nachwachs in den Kiehnen und andern Holzarten gefunden wird, so ist 30 Klafter auf 1000 als die äußerste Grenze angenommen, und für 21 bis incl. 30 Klafter der Zuwachs von 1 bis 70 Jahre berechnet, weil 70 Jahr die längste Periode der 1sten Classe in den Kiehnen ist. Da die Art des Holzes bei dieser Berechnung keinen Einfluß hat, so ist auch die Tabelle welche nach der 1sten Classe und dem Nachwuchs-Verhältniße der Eichen berechnet ist, nicht durchaus ausschließend für die Eichen bestimmt, findet man vielmehr, daß in einer Schlagholzart nach dem Verhältniße von 15 Klafter auf 1000 der Nachwuchs angenommen werden müße, und die Hau-Periode der 1sten Classe ist 18 Jahr, so kann man sich eben derselben Tabelle auch zur Ausmittelung des Nachwuchses dieser Schlagholzart bedienen, und so in allen übrigen Tabellen.

§. 146.

Der Gebrauch dieser Tabelle hat keine Schwierigkeit, und setzt blos voraus, daß man bei deren Anwendung mit Decimalzahlen multipliciren könne. Ist z. E. wie in dem Blocke A nach den Abschätzungs-Tabellen 1531 Klafter Eichen als der Brennholz-Bestand der Eichen angegeben, welche in 30 Jahren geholzt werden müßen, und einen Nachwachs von 10 Klafter auf 1000 erwarten lassen, so schlage man in der Tabelle in der querüberlaufenden Reihe, die Reihe: Auf 1000 Klafter 10 Klafter auf, und gehe in der zustimmenden Rubrique so weit herunter, bis man in der vordern Reihe un er Jahre auf 30 trift. Hier findet man 0,1509340 als den Nachwuchs einer Klafter für dies Verhältniß in 30 Jahr, und wenn man dies mit 1531 dem Bestande multiplicirt, so erhält man

```
    0,1509340
         1531
    ---------
      1509340
     452802
    754670
   150934
  -----------
  231,0799540
```

zum Produkt, wovon man die 231 Ganze als Nachwuchs in die Tabelle setzet.

Eben so ist der Nachwuchs der Kiehnen des Blokkes A berechnet; das Verhältniß des Nachwuses ist hier 20 Klafter 1000, und die Hau-Periode 50 Jahr. Hier sucht man die Colonne: Auf 1000 Klafter 20 Klafter, und geht in dieser bis zu 50 Jahren herunter, so findet man 0,5599612 als Nachwuchs Einer Klafter, und 10874 × 0,5599612 = 6089,0180888

oder 6089 Klafter ist der Nachwuchs, welchem die 10874 Klafter beim Haue geben können.

§. 147.

Fände man ferner in der summarischen Nachweisung irgend eines Reviers daß $339\frac{1}{4}$ Klafter jährlich zur Abholzung angegeben sind, von einem Brennholz-Bestande von 10874 Klafter ohne Zuwachs, und daß dies Quantum in 50 Jahren damit abgeholzt seyn soll, so kann man durch Hülfe der Tabelle leicht finden, wie stark der Zuwachs gerechnet worden ist. Setzen wir nemlich das abgeschätzte Brennholz-Quantum A, die Zahl aus der Tabelle, mit welcher A multiplicirt den Nachwuchs giebt m; das jährliche Abholzungs-Quantum b, und die Anzahl Jahre welche in der Classe gewirthschaftet werden muß n, so ist

$b = \frac{Am + A}{n}$ woraus $\frac{nb - A}{A} = m$ gefunden wird.

Hiernach ist also in dem angeführten Beispiele $A = 10874$, $b = 339\frac{1}{4} = 339{,}25$ und $n = 50$, daher

$$m = \frac{339{,}25 \times 50 - 10874}{10874} = \frac{16962{,}50 - 10874}{10874}$$

$$= \frac{6088{,}50}{10874} = 0{,}5599135$$ wenn man den Quotienten auf 7 zehntheilige Stellen berechnet.

Diesen für m gefundenen Werth suche man in der Tabelle in der queerüberlaufenden Reihe von 50 Jahr auf, so findet man, daß 0,5599612 am nächsten dazu stimmt, und die über die Colonne stehende Zahl: Auf 1000 Klafter 20 Klafter, zeigt daß man 20 Klafter auf 1000 jährlichen Zuwachs gerechnet habe.

Hiernach kann man sich auch der Tabelle bedienen, um durch Versuche in dem Forstreviere selbst den jährlich auf 1000 Klafter zu rechnenden Nachwuchs auszumitteln. Ist nemlich ein Revier abgeschäzt, und man kennt den auf einem Districte dieses Reviers befindlichen Bestand, so nehme man aus demselben jährlich ein bestimmtes Quantum heraus, und untersuche wie oft sich dies Quantum heraus nehmen laße, bis alles abgeholzt ist, wobei man jedoch die zu Samenbäumen stehen bleibende Stämme, als abgeholzt entweder in gleichen Theilen jährlich, oder in Summa in 1 oder 2 Jahren mit rechnen muß, so erhält man aus die Formel $\frac{nb - A}{A} = m$ die nöthigen Data um m daraus berechnen zu können, und die Tabelle giebt denn wieder, wie in vorigem Beispiele, die Anzahl Klafter an, welche das Revier auf 1000 Klafter gerechnet, jährlich während dem Haue nachgewachsen ist.

Wenn dieser Versuch mit Accuratesse befolgt, und während eines Zeitraumes von etwa 10 Jahren nicht ganz im kleinen ausgeführt wird. so wird man dadurch gewiß mit mehrere Zuversicht Resultate über den Zuwachs erhalten können, als dies durch Herunterhauen einzelner Bäume, und Berechnung des Nachwuchses nach den Jahresringen geschehn kann.

Ende des ersten Theils.

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Krause, Georg F.

Handbuch der mathematischen Forstwissenschaften zum Unterricht im Institut des Königl. Preussischen reitenden Jägercorps

Bd.: 1

Berlin (1800)

Oecon. 1016-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10296547-7
VD18 90381815